A 7;I

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -



Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

160731

Von zwölf Mädchen einer 7. Klasse ist bekannt, daß alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind.

Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:

Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.

Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

160732

Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks.

160733

Unter "Primzahldrillingen" wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, p+2, p+4 darstellen lassen.
Beweise, daß es genau eine Zahl p gibt, für die p, p+2, p+4 "Primzahldrillinge" sind, und ermittle diese!

30 06 30-1/ 1ooo/77 (2o4)

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

160734

Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Meter erfährt er, daß dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5 % der wahren Entfernung.

Ermittle die wahre Entfernung!

b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5 % der wahren Entfernung?

160735

Ermittle alle Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

160736

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9,1$ cm, $b = 6,3$ cm, $c = 6,7$ cm und $d = 5,0$ cm.

Dabei sei $a$ die Länge der Seite $AB$, $b$ die der Seite $BC$, $c$ die der Seite $CD$ und $d$ die der Seite $AD$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

30 06 30-1/1ooo/77 (2o4)

L 7;I .XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

160731 Lösung: 7 Punkte

Die Lösung läßt sich z. B. mit Hilfe folgender Tabelle ermitteln, wobei für jedes der Mädchen der Anfangsbuchstabe seines Vornamens gesetzt wurde:

2 P.

| Name | Produkt | Primfaktorenzerlegung | mögl. Geburtsdaten | tats. Daten |
|---|---|---|---|---|
| A | 49 | 7·7 | 7.7. | 7. 7. |
| B | 3 | (1)·3 | 3.1. oder ~~1.3.~~ | 3. 1. |
| C | 52 | 2·2·13 | ~~26.2.~~ oder 13.4. | 13. 4. |
| D | 130 | 2·5·13 | ~~26.5.~~ oder 13.10. | 13.10. |
| E | 187 | 11·17 | 17.11. | 17.11. |
| F | 300 | 2·2·3·5·5 | ~~30.10.~~ oder 25.12. | 25.12. |
| G | 14 | (1)·2·7 | ~~14.1.~~ oder 7.2. oder ~~2.7.~~ | 7. 2. |
| H | 42 | 2·3·7 | ~~21.2.~~ oder ~~14.3.~~ 7.6. oder ~~6.7.~~ | 7. 6. |
| I | 81 | 3·3·3·3 | 27.3. oder ~~9.9.~~ | 27. 3. |
| K | 135 | 3·3·3·5 | 27.5. oder ~~15.9.~~ | 27. 5. |
| L | 128 | 2·2·2·2·2·2·2 | 16.8. | 16. 8. |
| M | 153 | 3·3·17 | 17.9. | 17. 9. |

Die tatsächlichen Daten ermittelt man folgendermaßen:

1) Gibt es jeweils nur eine Möglichkeit für das Geburtsdatum, so ist für dieses Mädchen das Geburtsdatum dann festgelegt (gilt für A, E, L, M). 1 P.

2) Nun streicht man bei den verbleibenden Mädchen die Daten, deren Monatsnummer bereits bei den unter 1) genannten Daten auftritt, da laut Aufgabe in jedem Monat genau eines der gesuchten Geburtsdaten liegt (gilt für G, H, I, K). 2 P

30 06 30-1 /1ooo/77 (2o4)

Bleibt dabei bei einem Mädchen nur ein Datum übrig, ist damit sein Geburtsdatum ermittelt (I, K).

3) Indem man analog fortfährt, werden die restlichen Daten ermittelt.

B, G, D, F 2P Reihenfolge: Streichung bei B, D, H; Ermittlung des endgültigen Datums bei B, D; Streichung und damit endgültige Datenermittlung bei F, G und dann bei C, H.

Hinweis zur Korrektur: Die bloße Angabe einer tabellenartigen Liste mit darin angeführten Streichungen oder vergleichbaren Kennzeichnungen genügt nicht als voll zu bewertender Lösungsweg.

**160732 Lösung:** **5 Punkte**

Skizze 1P

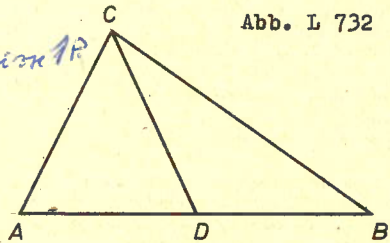


Abb. L 732

O.B.d.A werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (s. Abb. L 732).
Es ist zu beweisen, daß

$\overline{DC} < \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC})$ gilt.

Nach der Dreiecksungleichung gilt

im Dreieck ADC: $\overline{DC} < \overline{AD} + \overline{AC}$ 1 P.

im Dreieck DBC: $\overline{DC} < \overline{DB} + \overline{BC}$. 1 P.

Durch Addition beider Ungleichungen erhält man

$2\,\overline{DC} < \overline{AD} + \overline{AC} + \overline{DB} + \overline{BC}$ und, da $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}$, 1 P.

$2\,\overline{DC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$ bzw.

$\overline{DC} < \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$, 1 P. w.z.b.w.

L 7;I

<u>160733 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Angenommen, für eine Primzahl p seien p, p+2, p+4 Primzahldrillinge. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 1 ließe, so wäre p + 2 durch 3 teilbar und gleichzeitig (wegen p > 1) größer als 3, also nicht Primzahl. Wenn p bei Division durch 3 den Rest 2 ließe, so wäre p + 4 durch 3 teilbar und gleichzeitig größer als 3, also nicht Primzahl. Also muß p durch 3 teilbar und folglich selbst die Primzahl 3 sein.
In der Tat sind für p = 3 auch p + 2 = 5 und p + 4 = 7 Primzahlen. Somit gibt es, wie behauptet, genau eine Zahl p, für die p, p + 2, p + 4 Primzahldrillinge sind; dies ist die Zahl 3 (bzw. diese Primzahldrillinge sind 3, 5 und 7)

$p \equiv 1 \mod 3$ 2 P
$p \equiv 2 \mod 3$ 2 P
$p \equiv 0 \mod 3$ 2 P
3, 5, 7 1 P

XVI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

**160734) Lösung:** 6 Punkte

a) Die wahre Entfernung sei x Meter. Der Schätzwert war um 12,5 % von x Metern, d. h. um $\frac{1}{8}x$ Meter zu klein. Das bedeutet, daß der Schätzwert genau $\frac{7}{8}x$ Meter betrug. Mithin gilt

$\frac{7}{8}x = 350$, also

$$x = \frac{350 \cdot 8}{7} = 400.$$

Die wahre Entfernung beträgt also 400 m. 3 P.

b) In diesem Falle sei die wahre Entfernung y Meter. Der Schätzwert wäre um $\frac{1}{8}y$ Meter zu groß gewesen, d. h., er hätte $\frac{9}{8}y$ Meter betragen.

Folglich gilt $\frac{9}{8}y = 350$, also

$$y = \frac{350 \cdot 8}{9} = \frac{2800}{9} = 311\frac{1}{9}.$$

In diesem Falle würde die wahre Entfernung $311\frac{1}{9}$ m betragen. 3 P.

**160735 Lösung:** 7 Punkte

Angenommen, (x; y) sei ein Paar natürlicher Zahlen, das die Gleichung

$2x + 3y = 27$ erfüllt. Dann folgt

$3y = 27 - 2x$, also ist insbesondere x ein Vielfaches von 3. Weiter folgt

$$y = 9 - \frac{2}{3}x. \qquad (1)$$ 1 P.

Da y eine natürliche Zahl ist, gilt

$\frac{2}{3}x \leq 9$, also $x \leq \frac{27}{2}$; 1 P.

Daher kommen nur folgende Werte für x in Frage: x Vielfaches von 3 1 P.

$x = 0$, $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$ und $x = 12$. Nach (1) ergibt sich hierzu jeweils $y = 9$, $y = 7$, $y = 5$, $y = 3$ bzw. $y = 1$.

Also haben höchstens die Zahlenpaare (0;9), (3;7), (6;5), (9;3) und (12;1) die verlangten Eigenschaften. 2 P.

Nachweis 1 P.

30 06 30-1 /1ooo/77 (2o4)

Sie haben tatsächlich diese Eigenschaften; denn sie bestehen aus natürlichen Zahlen, und es gilt

$2 \cdot 0 + 3 \cdot 9 = 27$, $2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27$, $2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 27$,
$2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 = 27$, $2 \cdot 12 + 3 \cdot 1 = 27$.

160736) Lösung: 8 Punkte

I. Angenommen, ABCD sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 736). Dann ist $a > c$.

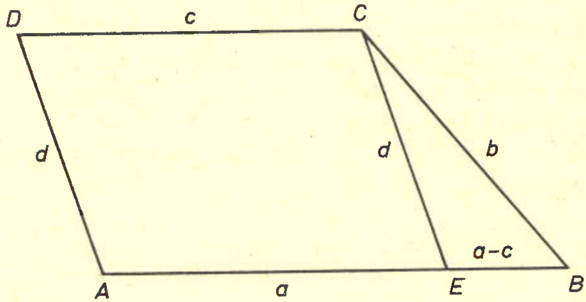


Abb. L 736

2 P.

Daher schneidet die Parallele zu AD durch C die Seite AB in einem inneren Punkte E, für den $\overline{AE} = c$, also $\overline{EB} = a - c$ gilt.

Daraus folgt, daß ein Trapez ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

konstruktion 2 P.

II. (1) Wir konstruieren das Teildreieck EBC aus $\overline{EB} = a-c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{EC} = d$.

(2) Wir verlängern BE über E um c und erhalten A.

2 P.

(3) Wir zeichnen die Parallele zu AB durch C.

(4) Wir zeichnen die Parallele zu CE durch A.

Der Schnittpunkt der beiden Parallelen aus (3) und (4) sei D genannt.

III. Jedes so erhaltene Viereck ABCD entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Das Viereck AECD ist ein Parallelogramm, also gilt $\overline{CD} = \overline{AE} = c$ und $\overline{AD} = \overline{EC} = d$, und ABCD ist ein Trapez mit AB $\parallel$ CD. Nach Konstruktion ist
$\overline{AB} = \overline{BE} + \overline{EA} = a - c + c = a = 9{,}1$ cm, $\overline{BC} = b = 6{,}3$ cm,
$\overline{CD} = \overline{AE} = c = 6{,}7$ cm und $\overline{AD} = \overline{EC} = d = 5{,}0$ cm. 1 P.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kriterium (sss) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, weil jede der drei Seitenlängen $a-c = 2{,}4$ cm, $b = 6{,}3$ cm und $d = 5{,}0$ cm kleiner als die Summe der beiden anderen ist.
Die Konstruktionsschritte (2), (3) und (4) sind danach stets eindeutig ausführbar.
Mithin existiert bis auf Kongruenz genau ein Trapez ABCD der geforderten Art. 1 P.

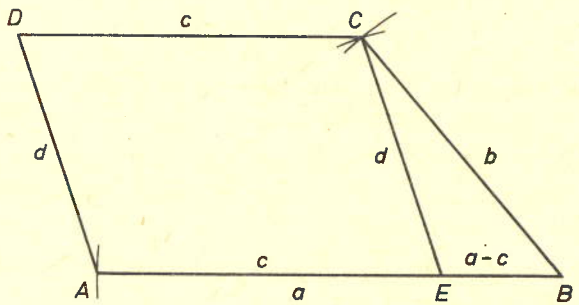


Abb. L 736 a