XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

181031

Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert ist und für alle x die Gleichung

$$x.f(x+2) = (x^2-9)f(x)$$

erfüllt, so hat sie mindestens drei reelle Nullstellen.

181032

Beweisen Sie: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind.

181033

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die erstens die Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{1}{a^2-3a+2} + \frac{1}{a^2-5a+6} + \frac{1}{a^2-7a+12} + \frac{1}{a^2-9a+20}$$

$$+ \frac{1}{a^2-11a+30} + \frac{1}{a^2-13a+42} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

stehen, definiert sind und zweitens diese Gleichung gilt.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

181034

Achim, Bernd und Dirk nehmen jeder genau einen der folgenden Gegenstände an sich: einen Ball, einen Ring, einen Würfel. Danach machen sie folgende Aussagen:

(1) Achim hat nicht den Ball oder Bernd hat den Ring.
(2) Bernd hat den Ring nicht oder Dirk hat den Würfel.
(3) Dirk hat den Würfel und Achim hat den Ball.
(4) Achim hat den Ball und Bernd hat den Ring nicht.

Ist es möglich, daß
a) alle vier Aussagen, b) genau drei Aussagen, c) genau zwei Aussagen, d) genau eine der Aussagen, e) keine der Aussagen gleichzeitig wahr sind (bzw. ist)?

181035

Man untersuche, ob es reelle Zahlen a,b,c,d mit folgender Eigenschaft gibt: Wenn f die für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

definierte Funktion ist, so gilt

$$f(0) = 10;\ f(1) = 12;\ f(2) = 4 \text{ und } f(3) = 1.$$

Gibt es solche Zahlen a,b,c,d, so ermittle man alle derartigen Zahlen.

181036

Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $\overline{CM} = 6$ cm, $\overline{CS} = 7$ cm und $\overline{MS} = 1{,}5$ cm gelte.
Man konstruiere zwei Punkte A und B so, daß sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

181031) Lösung: 5 Punkte

Setzt man in der gegebenen Gleichung nacheinander $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$, so erhält man:

$$0 \cdot f(2) = -9 \cdot f(0), \text{ also } f(0) = 0$$
$$3 \cdot f(5) = 0 \cdot f(3), \text{ also } f(5) = 0$$
$$-3 \cdot f(-1) = 0 \cdot f(-3), \text{ also } f(-1) = 0.$$

Die Funktion f hat mithin mindestens die drei Nullstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

181032) Lösung: 7 Punkte

A) Ein Dreieck ABC sei gleichseitig, d. h., es gelte $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann gilt nach dem Kongruenzsatz sss:
$\triangle AMC \cong \triangle BMC$. Also gilt $\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle BMC}$, d. h., die Seitenhalbierende CM ist auch Winkelhalbierende. Entsprechend beweist man die gleiche Aussage für eine der anderen Seitenhalbierenden.

B) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB, und die Seitenhalbierende CM sei auch Winkelhalbierende. Dann gilt

$$\overline{AM} = \overline{MB} \qquad (1)$$

und

$$\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle MCB}. \qquad (2)^{1)}$$

Die Parallelen zu AC durch B und zu BC durch A schneiden sich in einem Punkt C', und hierfür ist AC'BC ein Parallelogramm. Wegen (1) und da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, geht CC' durch M. Somit sind $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle AC'M$ Winkel an geschnittenen Parallelen und daher einander kongruent; hiernach und wegen (2) gilt

$$\overline{\sphericalangle ACM} = \overline{\sphericalangle AC'M}.$$

Also ist das Dreieck AC'C gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{AC'}$.
Hieraus und aus $\overline{AC'} = \overline{CB}$ folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$. (3)
Analog zeigt man: Ist etwa die Seitenhalbierende durch B auch Winkelhalbierende, so folgt $\overline{AB} = \overline{CB}$. (4)
Aus (3) und (4) folgt die Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$.

---

1) <u>Hinweis zur Korrektur</u>: Aus

$\overline{CM} = \overline{CM}$ (0)

und (1) und (2) kann nicht ohne weiteres (nach dem Kongruenzsatz ssw in üblicher Fassung) auf

$\triangle AMC \cong \triangle BHC$ (✱)

geschlossen werden, da nicht $\overline{AM} > \overline{CM}$ zu sein braucht. Eine mögliche Variante, auf anderem Wege aus (1), (2) weitere Aussagen zu erhalten, ist oben angegeben. Eine weitere Möglichkeit besteht z. B. darin, <u>folgende</u> (als Satz zu zitierende oder zuvor - etwa an Hand der beim Konstruktionsfall ssw auftretenden Figur - gesondert zu beweisende) <u>Fassung des Kongruenzsatzes ssw</u> heranzuziehen: "Aus (0), (1), (2) folgt (✱) oder

$\overline{\sphericalangle CAM} + \overline{\sphericalangle CBM} = 180^\circ$. (✱✱)"

Da (✱✱) hier dem Winkelsummensatz für das Dreieck ABC widerspricht, folgt (✱).

<u>181033) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für jede reelle Zahl a gilt

$$a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2),$$
$$a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3),$$
$$a^2 - 7a + 12 = (a-3)(a-4),$$
$$a^2 - 9a + 20 = (a-4)(a-5),$$
$$a^2 - 11a + 30 = (a-5)(a-6),$$
$$a^2 - 13a + 42 = (a-6)(a-7),$$
$$a^2 - 8a + 7 = (a-1)(a-7).$$

Daher sind die Terme auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung genau dann definiert, wenn a keine der Zahlen 1, 2, ..., 7 ist. Trifft dies zu, so gilt ferner für k = 1, ..., 6

$$\frac{1}{(a-k)(a-(k+1))} = -\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a-(k+1)}.$$

Also ist für reelles $a \neq 1, 2, \ldots, 7$ die gegebene Gleichung genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-7} = \frac{a(a+5)}{a^2-8a+7}$$

oder, für reelles $a \neq 1,2,\ldots,7$ gleichbedeutend hiermit,

$$\frac{-(a-7)+(a-1)}{(a-1)(a-7)} = \frac{a^2 - 5a}{a^2-8a+7},$$

$$\frac{6}{a^2-8a+7} = \frac{a^2 + 5a}{a^2-8a+7},$$

$$a^2+5a-6 = 0$$

gilt. Da die letztgenannte Gleichung genau die reellen Lösungen $a = 1$ und $a = -6$ hat, ist sie für reelles $a \neq 1,2,\ldots,7$ äquivalent mit $a = -6$. Also erfüllt genau diese Zahl die Bedingungen der Aufgabe.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Repulbik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

181034) Lösung: 7 Punkte

Es gibt genau 6 Möglichkeiten die drei Gegenstände b (Ball), r (Ring), w (Würfel) auf die drei Schüler A (Achim), B (Bernd), D (Dirk) zu verteilen. Aus der Definition der Alternative bzw. Konjunktion ergibt sich:

A B D	wahre Aussagen	falsche Aussagen
b r w	(1), (2),(3)	(4)
b w r	(2),(4)	(1),(3)
r b w	(1),(2)	(3),(4)
r w b	(1),(2)	(3),(4)
w b r	(1),(2)	(3),(4)
w r b	(1)	(2),(3),(4)

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß a) und e) nicht möglich sind, aber b), c) und d).

Bemerkung zur Korrektur: Zum Nachweis der Möglichkeit von b), c), d) genügt es auch, nur je ein Beispiel zu nennen. Die Unmöglichkeit von a), e) kann durch inhaltliche Schlüsse bewiesen werden, z. B. für a): Ist (3) wahr, so hat Bernd den Ring, also ist (4) falsch.
Für e): Ist (1) falsch, so hat Bernd den Ring nicht, also ist (2) wahr.

181035) Lösung: 6 Punkte

Für alle reellen a, b,c,d sind genau dann die geforderten Bedingungen erfüllt, wenn für sie die folgenden Gleichungen (1) bis (4) gelten:

$$d = 10, \qquad (1)$$
$$a + b + c + d = 12, \qquad (2)$$
$$8a + 4b + 2c + d = 4, \qquad (3)$$
$$27a + 9b + 3c + d = 1. \qquad (4)$$

I) Wenn (1) bis (4) für reelle a,b,c,d erfüllt sind, so folgt durch Einsetzen von (1) in (2), (3) und (4):

$$a + b + c = 2, \text{ also } c = 2 - a - b, \quad (5)$$

$$8a + 4b + 2c = -6, \text{ also } 4a + 2b + c = -3, \quad (6)$$

$$27a + 9b + 3c = -9, \text{ also } 9a + 3b + c = -3. \quad (7)$$

Setzt man (5) in (6) und (7) ein, so erhält man

$$3a + b = -5, \text{ also } b = -5 - 3a, \quad (8)$$

$$8a + 2b = -5. \quad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) in (9) folgt $2a = 5$, woraus man

$$a = \frac{5}{2} \quad (10)$$

erhält. Aus (10) und (8) ergibt sich

$$b = -\frac{25}{2}. \quad (11)$$

Daraus und aus (10) und (5) folgt $c = 2 - \frac{5}{2} + \frac{25}{2}$, also

$$c = 12. \quad (12)$$

Daher können nur die in (10), (11), (12), (1) genannten Zahlen die Gleichungen (1) bis (4) erfüllen.

II) Wie man durch Einsetzen dieser Zahlen in (1) bis (4) zeigen kann, erfüllen sie diese Gleichungen.
Die gesuchten Zahlen lauten somit $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{25}{2}$, $c = 12$, $d = 10$.

181036) Lösung: 8 Punkte

I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ist H der Mittelpunkt von AB, so teilt S die Seitenhalbierende CH im Verhältnis 1 : 2, also liegt H im Abstand $\overline{HS} = \frac{1}{2}\overline{SC}$ auf der Verlängerung von CS. Ferner liegt M als Mittelpunkt des Umkreises auf der Mittelsenkrechten von AB. MH verläuft also senkrecht zu AB. Schließlich liegen A und B auf dem Umkreis, d. h. dem Kreis um M durch C.
Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man trägt an CS in S auf der Verlängerung von CS über S hinaus die Strecke der Länge $\frac{1}{2}\overline{CS}$ an; ihr zweiter Endpunkt sei H.

(2) Man konstruiert die Gerade durch H, die auf MH senkrecht steht.

(3) Man zeichnet den Kreis um M durch C. Schneidet er die nach (2) konstruierte Gerade in zwei Punkten, so seien diese A und B genannt.

III. Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt: M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, da A, B und C

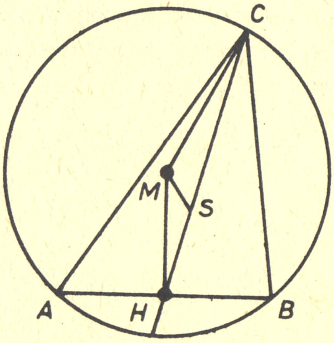

Abb. L 1036

nach Konstruktion auf ein und demselben Kreis um M liegen. Ferner gilt nach Konstruktion $\overline{MA} = \overline{MB}$ und $\overline{\sphericalangle AHM} = \overline{\sphericalangle BHM} = 90^\circ$, also ist $\triangle AHM \cong \triangle BHM$ (Kongruenzsatz ssw; dieser ist anwendbar, da $\sphericalangle AHM$, $\sphericalangle BHM$ als rechte Winkel jeweils der längsten Dreiecksseite gegenüberliegen). Somit gilt $\overline{AH} = \overline{BH}$, folglich ist CH Seitenhalbierende im Dreieck ABC. Da sie nach Konstruktion durch S im Verhältnis $\overline{HS} : \overline{SC} = 1 : 2$ geteilt wird, ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt ferner, daß H im Innern des nach (3) konstruierten Kreises liegt[1]. Also schneidet die in (2) konstruierte Gerade diesen Kreis in 2 Punkten. Da schließlich AB senkrecht zu MH verläuft und $\overline{\sphericalangle MHC} < 90^\circ$ ist[2], liegt C nicht auf der Geraden durch A und B. Also existiert zu den gegebenen Punkten M,S,C genau ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

---

1) Ein Beweis kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung aus
$\overline{MH} < \overline{MS} + \overline{HS} = \overline{MS} + \frac{1}{2}\overline{SC} = 1{,}5\text{ cm} + 3{,}5\text{ cm} < \overline{MC}$
entnommen werden; man wird aber auch als Argument zulassen, daß sich direkt nach Ausführung der Konstruktion H als innerer Punkt des Kreises erkennen läßt.

2) Dies kann man ebenfalls entweder nach Ausführung der Konstruktion feststellen oder z. B., aus $\overline{MC} = 6\text{ cm} < \overline{SC} < \overline{HC}$ entnehmen, wonach $\sphericalangle$ MHC im Dreieck MHC nicht der längsten Seite gegenüberliegt, also nicht der größte Winkel sein kann und folglich ein spitzer Winkel sein muß.