A 11/12;I

XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

231231

In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, daß sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und daß dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.

Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{DC}$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

231232

Die Kantenlängen eines beliebigen Quaders seien a, b, c, und die Länge seiner Raumdiagonale sei d.

Man beweise, daß dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 \geq abcd \cdot \sqrt{3}. \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Quader, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Von den folgenden Aufgaben 231233A und 231233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

231233 A

Man untersuche, ob es eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

a) von positiven rationalen Zahlen a_i,

b) von positiven ganzen Zahlen a_i

mit den folgenden Eigenschaften (1),(2) gibt:

A 11/12;I

(1) Nicht alle Glieder der Folge sind einander gleich.

(2) Für alle $n \geqq 2$ gilt

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right);$$

d. h., a_n ist das harmonische Mittel von a_{n-1} und a_{n+1}.

Falls eine solche Folge im Falle a) bzw. im Falle b) existiert, so sind ihre Glieder anzugeben. Falls sie nicht existiert, so ist das zu beweisen.

231233 B

Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
20 Karten, von denen jede mit genau einer der Zahlen 1,2,3,...,20 beschriftet ist (wobei jede dieser Zahlen vorkommt), liegen aufgedeckt, so daß die Zahlen zu sehen sind, auf dem Tisch. Von diesen Karten hat A in Gedanken zwei ausgewählt, ohne daß B weiß, um welche Karten es sich handelt.
B versucht nun, diese beiden Karten wie folgt zu ermitteln:
Als ersten "Zug" nimmt B zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele von diesen beiden Karten richtig sind (0, 1 oder 2 Karten). Dann legt B diese Karten wieder aufgedeckt zurück.
Waren es noch nicht die beiden richtigen Karten, so nimmt B beim zweiten Zug wieder zwei beliebig von ihm gewählte Karten, und A sagt ihm, wieviele davon richtig sind; B legt dann diese Karten wieder zurück. Dieses Verfahren wird so lange mit dem 3., 4., ... Zug fortgesetzt, bis B in einem dieser Züge die beiden richtigen Karten genommen hat. B hat gewonnen, wenn er spätestens mit dem 12. Zug die beiden richtigen Karten nimmt.
Bei einer Durchführung dieses Spiels beginnt B das Spiel mit der folgenden Strategie: Er nimmt
im 1. Zug die Karten 1,2 und, falls dies noch nicht die beiden richtigen Karten sind,
im 2. Zug die Karten 3,4 sowie, in entsprechender Weise fortgesetzt,
.....
falls in keinem der bisherigen Züge die beiden richtigen Karten (gleichzeitig in ein und demselben Zug) vorkamen,
im 9. Zug die Karten (17,18).

A 11/12;I

a) Man gebe zu dieser von B begonnenen Strategie eine Fortsetzungsstrategie für die weiteren Züge an, mit deren Hilfe B den Gewinn erzwingen kann.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B bei der angegebenen Strategie sogar spätestens mit dem 11. Zug die beiden richtigen Karten nimmt?

A 11/12;II XXIII. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

231234

Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen mit

$$0 \leq x < 2\pi$$

und $0 \leq y < 2\pi$,

die das Gleichungssystem

$$3 \cdot \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \qquad (1)$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 \qquad (2)$$

erfüllen.

231235

Man ermittle alle Paare (a,b) von Primzahlen a und b, für die $3a^2 + a = b^2 + b$ gilt.

231236

Es sei $\sphericalangle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180^\circ$. Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedesmal, wenn er auf einen Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit P_1, P_2, P_3, ... bezeichnet (soweit solche Punkte existieren). Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0^\circ < \varphi_0 < 180^\circ$).

Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen, ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte P_1, P_2, P_3, ... gibt, ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten P_1, P_2, P_3, ... einen Punkt P_k derart gibt, daß $\overline{SP_k} \leq \overline{SP_i}$ für alle i = 1, 2, 3, ... gilt und durch wieviele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, daß der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $\overline{SP_{m-1}} = \overline{SP_m}$ durchläuft, so daß also das Wegstück $P_0 \ldots P_{m-1}$ symmetrisch

liegt zum Wegstück $P_m \ldots P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$. Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfaßt:

I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α:

(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, daß Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$ erreicht.

(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geqq 1$ so daß $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geqq 2$ ist) für $k = 1, \ldots, m-1$ die Ungleichung $\overline{SP_k} < \overline{SP_{k-1}}$ erfüllen, daß dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $\overline{SP_m} \geqq \overline{SP_{m-1}}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, \ldots, n$ sogar $\overline{SP_k} > \overline{SP_{k-1}}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es

(C) genau einen,

(D) genau zwei,

(E) genau N

Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, daß für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $\overline{SP_m} = \overline{SP_{m-1}}$ gilt. In (E) sei dabei $N > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

L 11/12;I XXIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

231231) Lösung: 5 Punkte

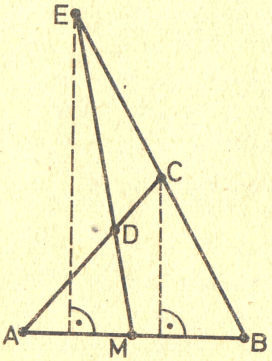

Abb. L 231231

Aus der Voraussetzung über die Flächeninhalte der Dreiecke AMD und CED folgt durch Addition des Flächeninhaltes des Vierecks MBCD zu diesen Dreiecksflächeninhalten, daß die Dreiecke ABC und MBE gleichen Flächeninhalt haben. Wegen $\overline{AB} = 2\ \overline{MB}$ hat folglich C halb so großen Abstand von AB wie E. Nach dem Strahlensatz (angewandt auf die Geraden durch B und A bzw. durch B und E sowie die zueinander parallelen Lote von E, C auf AB) folgt $\overline{BC} = \frac{1}{2}\ \overline{BE}$.
Also sind AC und EM Seitenhalbierende im Dreieck ABE, und für ihren Schnittpunkt D folgt

$$\overline{AD} : \overline{DC} = 2 : 1.$$

231232) Lösung: 7 Punkte

Da a, b, c und $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung (1) gezeigt, wenn man

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^2 \geqq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

bewiesen hat. Hierfür genügt es,

$$a^4b^4 + b^4c^4 + a^4c^4 - a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \geqq 0 \qquad (3)$$

zu zeigen, und diese Ungleichung gilt, da sie sich aus der wahren Ungleichung

$$(a^2b^2 - a^2c^2)^2 + (a^2b^2 - b^2c^2)^2 + (a^2c^2 - b^2c^2)^2 \geqq 0 \qquad (4)$$

ergibt.
Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (1) ist der Reihe nach äquivalent mit der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (2),

(3),(4), diese mit $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$, was wegen $a,b,c > 0$ genau für $a = b = c$ gilt.
Also gilt das Gleichheitszeichen in (1) genau dann, wenn der Quader ein Würfel ist.

<u>231233 A) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Eine Folge positiver rationaler Zahlen a_i erfüllt genau dann (1) und (2), wenn die Folge der Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ eine arithmetische Folge positiver rationaler Zahlen mit einer von 0 verschiedenen Differenz ist. (Hierzu ist entweder als bekannter Satz zu zitieren, daß eine Folge genau dann arithmetische Folge ist, wenn für alle $n \geqq 2$ das n-te Glied b_n das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(b_{n-1}+b_{n+1})$ seiner Nachbarglieder ist. Oder dies ist z. B. so zu beweisen: Die Folge ist genau dann arithmetische Folge, wenn für jedes $n \geqq 2$ die Differenz $b_n - b_{n-1}$ gleich der Differenz $b_{n+1} - b_n$ ist. Diese Gleichheit $b_n - b_{n-1} = b_{n+1} - b_n$ ist äquivalent mit $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n+1})$.)
Aus dieser Feststellung ergibt sich:

a) Da es arithmetische Folgen positiver rationaler Zahlen b_i mit einer von 0 verschiedenen Differenz gibt, z. B. $b_n = n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$, gibt es auch Folgen positiver rationaler Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2), z. B. $a_n = \frac{1}{n}$.

b) Gäbe es eine arithmetische Folge von Zahlen $b_i = \frac{1}{a_i}$ mit von 0 verschiedener Differenz d, für die alle a_i positive ganze Zahlen wären, so folgte $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ $(n = 1,2,3,\ldots)$.
Im Fall $d > 0$ ergäbe sich: Für alle $n > 1 + \frac{1}{d}(1 - \frac{1}{a_1})$ wäre $(n-1)d > 1 - \frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} > 1$, was für positive ganze Zahlen a_n nicht möglich ist.
Im Fall $d < 0$ ergäbe sich: Für alle $n > 1 - \frac{1}{d \cdot a_1}$ wäre $(n-1)d < -\frac{1}{a_1}$, also $\frac{1}{a_n} < 0$, was ebenfalls für positive (ganze) Zahlen a_n nicht möglich ist.
Also gibt es keine Folge positiver ganzer Zahlen a_i mit den Eigenschaften (1) und (2).

Andere Lösungsmöglichkeiten:

Man kann aus (2) durch vollständige Induktion

$$a_{n+1} = \frac{a_1 a_2}{n(a_1 - a_2) + a_2} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

erhalten und damit zu a) durch geeignete Wahl von a_1 und a_2 Beispiele erhalten (z. B. führt $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ auf $a_n = \frac{1}{n}$) sowie wegen $a_1, a_2, a_{n+1} > 0$ auf

$$a_1 > (1 - \frac{1}{n})a_2$$

schließen. Da dies für alle n gilt, folgt $a_1 \geqq a_2$ und dann wegen (1) sogar $a_1 > a_2$. Damit ergibt sich die Folge der a_{n+1} als streng monoton fallend, was mit positiven ganzen Zahlen unmöglich ist.

Ähnlich kann man auch im 1. Lösungsweg Aufgabe b) anschließend an die Formel $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d$ ohne weitere Rechnung mit den verbalen Feststellungen abschließen, daß $d > 0$ auf eine streng monoton steigende Folge der $\frac{1}{a_n}$, also eine streng monoton fallende Folge der a_n führen müßte und $d < 0$ für genügend großes n auf negative a_n.

231233 B) Lösung: 8 Punkte

a) Es sind genau die beiden folgenden Fälle möglich:

1. Fall: Unter den Paaren[1] (1,2), (3,4), ..., (19,20) befindet sich das richtige Paar.

In diesem Fall hat B entweder nach höchstens 9 Zügen das Paar mit den richtigen Karten genommen, oder er kann aus den Antworten "Null" auf die ersten 9 Züge erkennen, daß (19,20) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 10. Zug und hat damit den Gewinn erzielt.

2. Fall: Unter den Paaren (1,2), (3,4), ..., (19,20) befinden sich genau zwei Paare, in denen jeweils eine Karte richtig ist.

---

1 Als "Paar" wird hier eine Menge (z_1,z_2) aus zwei Elementen verstanden, also nicht ein geordnetes Paar; d. h., es erfolgt keine Festlegung, welches der Elemente z_1,z_2 "erstes" oder "zweites" Element sei, es gilt $(z_1,z_2) = (z_2,z_1)$.

In diesem Fall weiß B (spätestens) nach dem 9. Zug, welche Paare dies sind.[2] Es seien die Paare (a_1,a_2) und (a_3,a_4) (etwa mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$). Dabei sind genau die in der folgenden Tabelle angegebenen vier Fälle möglich (die Angabe W unter a_i bedeutet, daß a_i eine der richtigen Karten ist; die Angabe F, daß a_i keine der richtigen Karten ist):

Fall	a_1	a_2	a_3	a_4
2.1.	W	F	W	F
2.2.	W	F	F	W
2.3.	F	W	W	F
2.4.	F	W	F	W

Jetzt nimmt B im 10. Zug die Karten (a_1,a_3).
Im Fall 2.1. hat er damit die richtigen Karten genommen und das Spiel gewonnen.
Im Fall 2.4. erfährt er mit der Antwort "Null" auf den 10. Zug, daß (a_2,a_4) das richtige Paar ist. Er nimmt es mit dem 11. Zug und gewinnt damit.
In den Fällen 2.2. und 2.3., die durch die Antwort "Eins" auf den 10. Zug charakterisiert sind, nimmt B im 11. Zug die Karten (a_1,a_4). Lag der Fall 2.2. vor, so hat B damit gewonnen. Lag aber der Fall 2.3. vor, so erfährt B dies in der Antwort "Null" auf den 11. Zug. Er nimmt im 12. Zug (a_2,a_3) und gewinnt damit.
Durch die angegebene Strategie erzwingt B also den Gewinn.

b) Für jedes Paar (z_1,z_2) aus zwei verschiedenen der Zahlen $1,\ldots,20$ gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zahl z_1 eine der beiden richtigen Zahlen ist, beträgt $P_1 = \frac{2}{20}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dann z_2 die andere richtige Zahl ist, beträgt

2 Laut Aufgabenstellung führt B die bis zum 9. Zug festgelegte Strategie des Nehmens von (1,2), (3,4), ..., (17,18) im Fall 2 auch dann durch, wenn er die genannten beiden Paare schon eher kennt, obwohl diese Strategie dann unnötig viele Züge bedingt. Diese Festlegung geht wesentlich in Aufgabe b) ein.

$P_2 = \frac{1}{19}$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (z_1, z_2) das richtige Paar ist, $P_1 P_2 = \frac{1}{190}$.
Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter den Paaren (1,2), (3,4), ..., (19,20) das richtige befindet (1. Fall),

$$10 \cdot \frac{1}{190} = \frac{1}{19}.$$

(Dies kann man auch so herleiten: A hatte genau $\binom{20}{2} = 190$ Möglichkeiten, das dann als "richtiges" geltende Paar in Gedanken auszuwählen. Von diesen Möglichkeiten sind für das Eintreten des Falles 1 genau 10 günstig.)
Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fall 2 eintritt, $1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}$. Die vier Fälle 2.1. bis 2.4. haben einander gleiche Wahrscheinlichkeit. B hat genau dann[3] nach 11 Zügen den Gewinn noch nicht erreicht, wenn der Fall 2.3. vorliegt; die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt folglich

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{18}{19} = \frac{9}{38}.$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B den Gewinn spätestens nach 11 Zügen erreicht hat,

$$1 - \frac{9}{38} = \frac{29}{38} \approx 0{,}763.$$

<u>Hinweis zur Korrektur:</u>
Es ist (theoretisch) möglich, daß ein Schüler zu Aufgabe a) eine "falsche" (d. h. nicht in jedem Fall den Gewinn erzwingende) Strategie angibt und die in b) gesuchte Wahrscheinlichkeit unter Annahme dieser Strategie ermittelt.
Wenn diese Ermittlung das - unter der genannten Annahme möglicherweise von $\frac{29}{38}$ abweichende - Ergebnis richtig erbringt oder Teilschritte enthält, die richtige Bestandteile eines Weges zu diesem Ergebnis sind, so ist eine solche Ermittlung (bzw. so sind derartige Teilschritte) mit entsprechenden Punktanteilen zu werten.
Entsprechend ist zu verfahren, wenn ein Schüler entgegen der Aufgabenstellung eine aus Anmerkung 2 ersichtliche "verbesserte" Strategie zugrundelegt. (Es ergibt sich hierbei: Vermeidet B bei sonst ungeändertem Vorgehen der beschriebenen Art die in Amerkung 2 ersichtlichen unnötigen Züge der Anfangsstrategie, so ver-

---

3 Vgl. Anmerkung 2.

bleiben für den erst im 12. Zug erreichten Gewinn genau die Möglichkeiten, daß das "richtige" Paar eines der 17 Paare (2,17), (4,17), ..., (16,17), (2,19), (4,19), ..., (18,19) ist. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn spätestens nach 11 Zügen beträgt bei dieser Strategie also $1 - \frac{17}{190} = \frac{173}{190} \approx 0{,}911$.)

231234) Lösung: 6 Punkte

I. Wenn ein Paar (x,y) die verlangten Eigenschaften hat, so folgt aus (1)

$$9 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 y = \cos^2 x \cdot \sin^2 y. \qquad (3)$$

Für die Zahl $a = \sin^2 x$ gilt

$$a \geqq 0 \qquad (4)$$

sowie wegen (2)

$$\sin^2 y = 1 - a = \cos^2 x,$$
$$\cos^2 y = a.$$

Damit erhält man aus (3)

$$9a^2 = (1 - a)^2,$$

also $8a^2 + 2a - 1 = 0$,

$$a = -\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{8}},$$

wegen (4) also

$$a = \frac{1}{4}$$

und daher

$$|\sin x| = |\cos y| = \frac{1}{2}, \quad |\cos x| = |\sin y| = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Weiterhin gibt es wegen (1) für die Vorzeichen von sin x, cos x, sin y, cos y nur die im Folgenden ersichtlichen Möglichkeiten und damit wegen $0 \leqq x < 2\pi$, $0 \leqq y < 2\pi$ nur die anschließend genannten Möglichkeiten für x und y selbst:

sin x	cos x	sin y	cos y	x	y
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$

(sin x	cos x	sin y	cos y	x	y)
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$

II. Für alle damit genannten Paare (x,y) bestätigt man, daß sie (1) und (2) erfüllen.
Daher sind genau diese (x,y) die zu ermittelnden Paare.

<u>231235) Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

I. Wenn (a,b) ein Paar von Primzahlen ist, für die

$$3a^2 + a = b^2 + b \qquad (1)$$

gilt, so folgt:
Es gilt $a \neq b$ (da $a = b$ in (1) auf $a = 0$ führen würde), also ist die Primzahl a nicht Teiler von b. Da sie aber nach (1) Teiler von b(b+1) ist, muß sie folglich Teiler von b+1 sein; d. h., es gibt eine natürliche Zahl n (> 0) mit $b+1 = n \cdot a$.
Einsetzen in (1) ergibt

$$a(3a + 1) = (na - 1)\cdot na,$$
$$3a + 1 = n^2a - n,$$
$$a(n^2 - 3) = n + 1,$$

also, da $n^2 - 3 \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen n ist,

$$a = \frac{n + 1}{n^2 - 3}.$$

Wäre n = 1, so folgte

$$a = -1. \qquad (2)$$

Wäre $n \geqq 3$, so folgte

$$n^2 - n - 4 = n(n-1) - 4$$
$$\geqq 3 \cdot 2 - 4$$
$$> 0,$$

also $n^2 - 3 > n + 1$ und damit

$$a = \frac{n + 1}{n^2 - 3} < 1. \qquad (3)$$

Da (2) und (3) für Primzahlen a nicht möglich sind, verbleibt nur die Möglichkeit n = 2 und damit a = 3, b = 5.

II. Das Paar (3;5) besteht aus Primzahlen und erfüllt

$$3 \cdot 3^2 + 3 = 30 = 5^2 + 5.$$

Also hat genau das Paar (3;5) die verlangten Eigenschaften.

<u>231236) Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

I. Die Größe des Winkels, den der von P_k ausgehende Lichtstrahl mit der von P_k nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_k genannt. Dieser von P_k ausgehende Lichtstrahl erreicht genau dann den anderen Schenkel des Winkels $\sphericalangle P_0SQ$, wenn

$$\varphi_k < 180^\circ - \alpha$$

gilt. Ist dies der Fall, so hat derjenige Winkel, den die von P_{k+1} nach P_k führende Halbgerade mit der Verlängerung von SP_{k+1} über P_{k+1} hinaus bildet (Abb. L 231230), nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\varphi_k + \alpha$. Nach dem Reflexionsgesetz ist also auch $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \alpha$. Für alle diejenigen k, für die P_k existiert, folgt somit durch vollständige Induktion

$$\varphi_k = \varphi_0 + k \cdot \alpha.$$

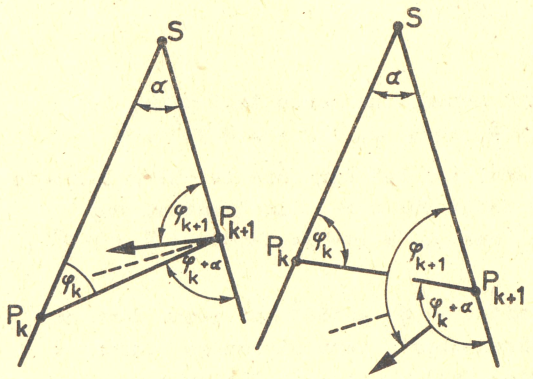

Abb. L 231236

Wenn daher zu gegebenem (α und) φ_0 eine Zahl k die Eigenschaft

$$\varphi_0 + k \cdot \alpha < 180^\circ$$

hat, dann gilt (entweder k = 0 oder, falls $k \geqq 1$ ist) $\varphi_{k-1} = \varphi_0 + (k-1) \cdot \alpha < 180^\circ - \alpha$; d. h., dann existiert ein Punkt P_k. Wenn aber $\varphi_0 + k \cdot \alpha \geqq 180^\circ$ ist, dann gilt

($k \geqq 1$ und) $\varphi_{k-1} \geqq 180^\circ - \alpha$; d. h., dann existiert kein Punkt P_k (mit diesem k).

Für jedes φ_0 gibt es nun genau eine natürliche Zahl n so, daß

$$\varphi_0 + n \cdot \alpha < 180^\circ, \text{ aber } \varphi_0 + (n+1) \cdot \alpha \geqq 180^\circ$$

gilt. Genau diese Zahl hat folglich die in (A) behauptete Eigenschaft.

Für jedes φ_0 und jede natürliche Zahl $k \geqq 1$, für die P_k existiert, sowie für jede der drei Relationen in

$$\overline{SP_k} \lesseqgtr \overline{SP_{k-1}}$$

gilt weiter, daß die betreffende Relation infolge des Satzes über Dreiecksseiten und ihre Gegenwinkel äquivalent ist mit der entsprechenden Relation in

$$\varphi_{k-1} \lesseqgtr 180^\circ - (\varphi_{k-1} + \alpha),$$

$$\varphi_{k-1} \lesseqgtr 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi_0 + (k-1) \cdot \alpha \lesseqgtr 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi_0 + k \cdot \alpha \lesseqgtr 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Zu jedem φ_0 gibt es sodann genau eine ganze Zahl g so, daß

$$\varphi_0 + (g-1) \cdot \alpha < 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \text{ aber } \varphi_0 + g \cdot \alpha \geqq 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

gilt. Genau die Zahl $m = \mathrm{Max}(1;g)$ hat dann die in (B) behauptete Eigenschaft (insbesondere folgt für $m > 1$ die Existenz von $P_0, \ldots, P_{m-1}$ wegen $\alpha < 180^\circ$ aus $\varphi_0 + (m-1) \cdot \alpha < 90^\circ + \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$ und (A)).

II. Eine Winkelgröße φ_0 mit $0^\circ < \varphi_0 < 180^\circ$ hat genau dann die in II. zu untersuchende Eigenschaft, wenn diejenige (durch α und φ_0 eindeutig bestimmte) Zahl m, die die Gleichung

$$\varphi_0 + m \cdot \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

erfüllt, eine natürliche Zahl $m \geqq 1$ ist. Zu gegebenem α existieren daher genau so viele derartige Winkelgrößen φ_0, wie es natürliche Zahlen $m \geqq 1$ mit

$$0^\circ < 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - m \cdot \alpha < 180^\circ$$

gibt. Diese Bedingung für m ist äquivalent mit

$$\frac{\alpha}{2} - 90^\circ < m \cdot \alpha < \frac{\alpha}{2} + 90^\circ,$$

also, da die linke Ungleichung wegen $\alpha < 180^\circ$ für alle natürlichen Zahlen gilt, mit

$$m < \frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha}.$$

Wegen $\alpha < 180^\circ$ ist stets $\frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} > 1$, also gibt es stets mindestens eine natürliche Zahl $m \geqq 1$, die diese Bedingung erfüllt.

(C) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geqq 1$ erfüllt, wenn $\frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} \leqq 2$ gilt. Das trifft genau für alle $\alpha \geqq 60^\circ$ zu.

(D) Die Bedingung wird genau dann von den Zahlen $m = 1$, $m = 2$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geqq 1$ erfüllt, wenn $2 < \frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} \leqq 3$ gilt. Das trifft genau für alle α mit $36^\circ \leqq \alpha < 60^\circ$ zu.

(E) Die Bedingung wird genau dann von den N Zahlen $m = 1$, $m = 2, \ldots, m = N$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geqq 1$ erfüllt, wenn $N < \frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} \leqq N + 1$ gilt. Das trifft genau für alle α mit

$$\frac{180^\circ}{2N + 1} \leqq \alpha < \frac{180^\circ}{2N - 1}$$

zu.