

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker  
der Deutschen Demokratischen Republik  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Olympiadeklasse 6

**Achtung:** Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

240621

Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

- (1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
- (2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
- (3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
- (4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

240622

Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen  $a = 3$  cm,  $b = 4$  cm,  $c = 5$  cm werden rot angestrichen.

Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.

Wieviele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen? (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

240623

Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.

A 6

Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.

Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

240624

Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. (Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)

Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

- (1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
- (2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
- (3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
- (4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat: "Wieviele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?"

Beweise, daß man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne daß ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR  
 2. Stufe (Kreisolympiade)  
Lösungen und Punktbewertung  
 Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die  
 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

240621) Lösung: 10 Punkte

Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in Abbildung L 240621 a gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes gegenüber; damit verbleibt für ihn nach Abbildung L 240621 a nur der Platz rechts neben Ines. Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in Abbildung L 240621 a noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester. Da sie nach (4) auch nicht Steffens Schwester ist, muß

Kerstin Michaels Schwester (\*)

sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm. Wie Abbildung L 240621 a zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Abbildung L 240621 b.

Weiter folgt aus Abbildung L 240621 (a oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (\*) nicht Michaels Schwester. Also ist

Ines Jörgs Schwester, (\*\*)

und als drittes zusammengehörendes Geschwisterpaar verbleiben

Agnes und Steffen. (\*\*\*)

Damit ist bewiesen, daß man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (\*), (\*\*), (\*\*\*) bzw. Abbildung L 240621 b angegeben.

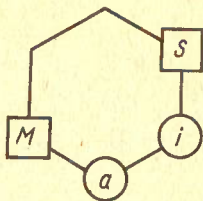


Abb. L 240621 a

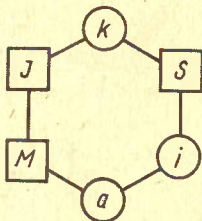


Abb. L 240621 b

240622) Lösung:10 Punkte

Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6  
 Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22  
 Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24  
 Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8  
 Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0  
 Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0  
 Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0

240623) Lösung:8 Punkte

Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:

Rainer fährt wegen  $6 \cdot 9 = 54$  in einer Stunde 54 km,

Jürgen fährt wegen  $6 \cdot 8 = 48$  in einer Stunde 48 km,

Frank fährt wegen  $6 \cdot 6 = 36$  in einer Stunde 36 km.

Somit betragen nach einer Stunde wegen  $54 - 48 = 6$  bzw.

$54 - 36 = 18$  bzw.  $48 - 36 = 12$  die Weglängen

zwischen Rainer und Jürgen 6 km,

zwischen Rainer und Frank 18 km,

zwischen Jürgen und Frank 12 km.

240624) Lösung:12 Punkte

Ist  $k$ ,  $w$  bzw.  $p$  das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), daß jede Kugel das Gewicht  $k$  und jeder Würfel das Gewicht  $w$  hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

L 6

$$p + 5w = 14k \quad (5)$$

und  $w + 8k = p. \quad (6)$

Wegen (6) besagt (5)

$$w + 8k + 5w = 14k,$$

also  $6w = 6k$

und folglich  $w = k.$

Hiernach ergibt sich aus (6)

$$9k = p.$$

Damit ist bewiesen, daß man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 6

Gesamtpunktzahl: 40

|  |  |                   |
|--|--|-------------------|
| 240621   |  | 10 Punkte         |
| Für die Schlußfolgerungen zur Feststellung<br>des ersten Geschwisterpaares,                                  |  | 4 Punkte          |
| des zweiten Geschwisterpaares,   |  | 3 Punkte          |
| des dritten Geschwisterpaares  |  | 3 Punkte          |
| <br>   |  |                   |
| 240622   |  | 10 Punkte         |
| Für die Angabe der Anzahl der Würfel mit<br>0 bzw. 1 bzw. 2 bzw. 3 rot angestrichenen<br>Flächen je 2 Punkte |  | zusammen 8 Punkte |
| Für die Angabe der Anzahl der Würfel mit<br>4 bzw. 5 bzw. 6 rot angestrichenen Flächen                       |  | zusammen 2 Punkte |
| <br>   |  |                   |
| 240623   |  | 8 Punkte          |
| Für die Feststellung, daß 1 Stunde das Sechsfache<br>von 10 Minuten ist                                      |  | 1 Punkt           |
| Für die in 1 Stunde von jedem Fahrer zurückgelegte<br>Weglänge je 1 Punkt                                    |  | zusammen 3 Punkte |
| Für die Berechnung der Differenzen<br>je 1 Punkt   |  | zusammen 3 Punkte |
| Antwortsatz  |  | 1 Punkt           |
| <br>   |  |                   |
| 240624   |  | 12 Punkte         |
| Für die Schlußfolgerung, daß $p + 5w = 14k$ gilt   |  | 3 Punkte          |
| Für die Schlußfolgerung, daß $w + 8k = p$ gilt   |  | 3 Punkte          |
| Für die Schlußfolgerung, daß $w = k$ gilt  |  | 3 Punkte          |
| Für die Schlußfolgerung, daß $9k = p$ gilt   |  | 3 Punkte          |