

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker  
 der Deutschen Demokratischen Republik  
 2. Stufe (Kreisolympiade)  
 Olympiadeklasse 8

**Achtung:** Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

280821

Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.

Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.

- a) Wieviel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?
- b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

280822

Beweise die folgende Aussage!

Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

280823

In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei ABCD ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.

- a) Simone mißt den Winkel  $\angle BPM$  und stellt fest, daß die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!

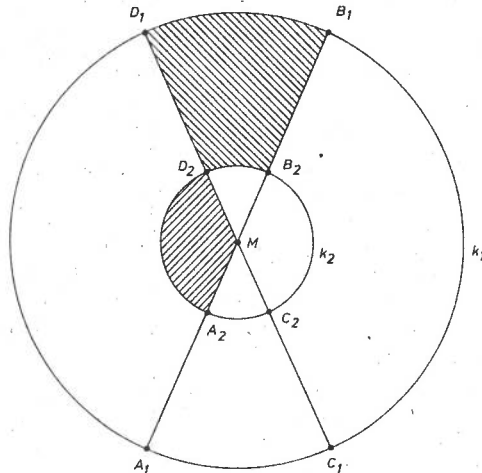
A 8

b) Frank mißt von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, daß diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.

Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

280824

Es seien  $k_1$  und  $k_2$  zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie 3:1 verhalten. Zwei Durchmesser  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  von  $k_1$  schneiden  $k_2$  in Punkten  $A_2, B_2$  bzw.  $C_2, D_2$ , die so angeordnet sind, wie die Abbildung A 280824 zeigt.



a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes  $A_2MD_2$  und des Kreisringausschnittes  $D_2B_2B_1D_1$ , wenn vorausgesetzt wird, daß  $\sphericalangle A_1MD_1$  ein rechter Winkel ist!

Abb. A 280824

b) Wie hat man die Größe des Winkels  $\sphericalangle A_1MD_1$  zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisausschnittes  $A_2MD_2$  gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes  $D_2B_2B_1D_1$  ist?

## XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

## Olympiadeklasse 8

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die

1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

280821) Lösung:11 Punkte

a) Der Tanker legt an jedem Tage  $\frac{1}{15}$  der Route zurück. Am Tage des Auslaufens des Frachters hat der Tanker bereits  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$  des Weges zurückgelegt, der Abstand der beiden Schiffe beträgt zu diesem Zeitpunkt daher  $\frac{3}{5}$  der Route.

Wegen  $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$  nähern sich beide Schiffe täglich um  $\frac{3}{20}$  der Route. Da  $\frac{3}{5} : \frac{3}{20} = \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{3} = 4$  ist, treffen sich beide Schiffe 4 Tage nach Abfahrt des Frachters.

b) Der Frachter legt in 4 Tagen  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  der Route zurück und der Tanker wegen  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  (oder wegen seiner Fahrzeit von 10 Tagen und  $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ) die restlichen  $\frac{2}{3}$  der Route.

Oder (anderer Lösungsweg): Für die Zahlenwerte der (in beliebiger Längeneinheit gemessenen) Werte, der (in Tagen gemessenen) Zeiten und der (in Längeneinheiten/Tag gemessenen) Geschwindigkeiten seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Weg von A bis B:  $s$ ,

Weg von A bis zum Treffpunkt:  $s_1$ ,

Weg von B bis zum Treffpunkt:  $s_2$ ,

Zeit vom Start des Frachters bis zum Treffen:  $t_1$ ,

Zeit vom Start des Tankers bis zum Treffen:  $t_2$ ,

Geschwindigkeit des Frachters:  $v_1$ ,

Geschwindigkeit des Tankers:  $v_2$ .

Mit diesen Bezeichnungen folgt aus den Angaben der Aufgabenstellung:

$$s_1 + s_2 = s, \quad (1)$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1, \quad s_2 = v_2 \cdot t_2, \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{s}{12}, \quad v_2 = \frac{s}{15}, \quad (3)$$

$$t_2 = t_1 + 6. \quad (4)$$

L 8

Nach (3) und (4) folgt aus (2)

$$s_1 = \frac{st_1}{12}, \quad (5)$$

$$s_2 = \frac{s(t_1+6)}{15}.$$

Damit ergibt sich aus (1)

$$\frac{st_1}{12} + \frac{s(t_1+6)}{15} = s.$$

Dividiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung durch  $s$  und multipliziert mit 60, so folgt

$$5t_1 + 4(t_1 + 6) = 60,$$

$$5t_1 + 4t_1 + 24 = 60,$$

$$9t_1 = 36,$$

$$t_1 = 4. \quad (6)$$

Hieraus folgt aus (5) und dann aus (1):

$$s_1 = \frac{1}{3}s, \quad s_2 = \frac{2}{3}s. \quad (7)$$

Mit (6) und (7) hat man als Antworten

zu a): 4 Tage, zu b):  $\frac{1}{3}$  bzw.  $\frac{2}{3}$  der Route.

#### 280822) Lösung:

7 Punkte

Nach dem Satz, daß es unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau eine durch 3 teilbare gibt\*, folgt erstens, daß es erst recht unter je fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mindestens eine durch 3 teilbare Zahl gibt. Ferner folgt, daß es unter je sechs, also erst recht unter fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen höchstens zwei durch 3 teilbare Zahlen geben kann. Zu beiden Teilen der Aufgabenstellung ist damit der geforderte Beweis gebracht. |

#### Oder (anderer Lösungsweg):

Für je fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Die kleinste dieser Zahlen ist von einer der Formen  $k = 3n$ ,  $k = 3n+1$ ,  $k = 3n+2$  mit natürlichem  $n$ .

Ist  $k = 3n$ , so sind von den fünf Zahlen genau  $3n$  und  $3n+3$  durch 3 teilbar, dagegen  $3n+1$ ,  $3n+2$  und  $3n+4$  nicht.

\* Dieser Satz kann (wie z. B. aus 280813 hervorgeht) als bekannter Sachverhalt zitiert oder gesondert bewiesen werden (was im wesentlichen auf eine Variante des obigen Lösungsweges hinausläuft).

L 8

Ist  $k = 3n+1$ , so ist von den fünf Zahlen genau  $3n+3$  durch 3 teilbar, dagegen sind dies  $3n+1$ ,  $3n+2$ ,  $3n+4$  und  $3n+5$  nicht.

Ist  $k = 3n+2$ , so sind von den fünf Zahlen genau  $3n+3$  und  $3n+6$  durch 3 teilbar, dagegen  $3n+2$ ,  $3n+4$  und  $3n+5$  nicht.

Damit ist die genannte Aussage in jedem möglichen Fall bewiesen. (Es folgen sogar genauere Aussagen über die durch 3 teilbaren Zahlen; solche zusätzlichen Angaben werden vom Schüler nicht gefordert.)

280823) Lösung:

11 Punkte

- a) Für jedes Quadrat ABCD mit den genannten M, N, P gilt
- $\overline{BC} = \overline{CD}$  (Seitenlängen des Quadrates),
  - $\overline{CN} = \overline{DM}$  (halbe Seitenlängen des Quadrates),
  - $\sphericalangle BCN = \sphericalangle CDM$  (Innenwinkel des Quadrates),
- also  $\triangle CBN \cong \triangle DCM$  (Kongruenzsatz sws)

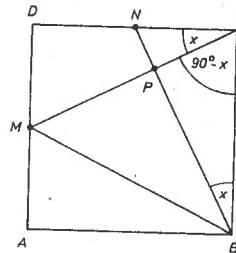


Abb. L 280823

und daher

$\sphericalangle NBC = \sphericalangle MCD$ . Die Größe dieser Winkel sei mit  $x$  bezeichnet.

Somit gilt  $\sphericalangle BCM = 90^\circ - x$ , und aus dem Innenwinkelsatz für  $\triangle BCP$  folgt

$$\sphericalangle CPB = 180^\circ - x - (90^\circ - x) = 180^\circ - x - 90^\circ + x = 90^\circ.$$

Also stehen die Strecken CM und BN senkrecht aufeinander.

- b) Analog zu a) kann man  $\triangle ABM \cong \triangle DCM$  zeigen. Die Dreiecke ABM, DCM und CBN haben somit den gleichen Flächeninhalt, dieser sei mit  $F$  bezeichnet. Ist  $a$  die Seitenlänge des Quadrates ABCD, so gilt

$$F = \frac{1}{4} a^2. \quad (1)$$

Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke DCM und CBN beträgt  $\frac{1}{2} a^2$ . Der Flächeninhalt des Fünfecks DCBPM ist jedoch kleiner als  $\frac{1}{2} a^2$ , da sich die genannten Dreiecke im Dreieck NCP überlappen. Somit ist die Quadratrestfläche ABPM größer als  $\frac{1}{2} a^2$ . Hieraus und wegen (1) folgt, daß der Flächeninhalt des Dreiecks BPM größer als  $\frac{1}{4} a^2$  sein muß. Demzufolge sind die beiden Dreiecke ABM und BPM nicht einander flächengleich.

Zur Erleichterung der Korrektur bei anderen Lösungswegen: Mit Hilfe von Sätzen über rechtwinklige Dreiecke kann man erhalten:

$$\overline{BM} = \overline{BN} = \overline{CM} = \frac{a}{2} \sqrt{5}, \quad \overline{BP} = \frac{2a}{5} \sqrt{5}, \quad \overline{PN} = \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{a}{10} \sqrt{5},$$

$$\overline{CP} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a}{5} \sqrt{5}, \quad \overline{PM} = \frac{3a}{2\sqrt{5}} = \frac{3a}{10} \sqrt{5}; \text{ der Flächeninhalt von}$$

$\triangle BPM$  beträgt  $\frac{3}{10} a^2$ . (Dies folgt auch ohne Quadratwurzeln daraus, daß die Flächeninhalte der Dreiecke  $CNP$  und  $BCP$  sich wegen der Ähnlichkeit wie 1:4 verhalten: Folglich hat  $\triangle CNP$  den Flächeninhalt  $\frac{1}{5} F$  usw.)

280824) Lösung:

11 Punkte

- a) Es seien  $\overline{A_1M} = r_1$  und  $\overline{A_2M} = r_2$ . Dann ist der Flächeninhalt  $F_1$  des Kreisausschnittes  $A_2MD_2$

$$F_1 = \frac{r_2^2 \pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{r_2^2 \pi}{4}$$

und der Flächeninhalt  $F_2$  des Kreisringausschnittes  $D_2B_2B_1D_1$

$$F_2 = \frac{r_1^2 \pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{r_2^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} (r_1^2 - r_2^2).$$

Wegen  $r_1 = 3 r_2$  ist  $r_1^2 - r_2^2 = 8 r_2^2$ , und es folgt

$$F_2 = 2 \pi r_2^2.$$

Das Verhältnis  $F_1 : F_2$  beträgt demnach

$$F_1 : F_2 = \frac{r_2^2 \pi}{4} : 2 \pi r_2^2 = 1 : 8.$$

- b) Es seien  $\overline{A_1M} = r_1$ ;  $\overline{A_2M} = r_2$  und  $\sphericalangle A_1MD_1 = \alpha$ .

Nun gilt für den Flächeninhalt  $F_3$  des Kreisausschnittes  $A_2MD_2$ :

$$F_3 = \frac{r_2^2 \pi \alpha}{360^\circ}.$$

Da  $\sphericalangle B_1MD_1$  Nebenwinkel von  $\sphericalangle A_1MD_1$  ist, beträgt seine Größe  $180^\circ - \alpha$ . Für den Flächeninhalt  $F_4$  des Kreisringausschnittes  $D_2B_2B_1D_1$  ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{r_1^2 \pi (180^\circ - \alpha)}{360^\circ} - \frac{r_2^2 \pi (180^\circ - \alpha)}{360^\circ} \\ &= \frac{\pi (180^\circ - \alpha)}{360^\circ} (r_1^2 - r_2^2). \end{aligned}$$

L 8

Wegen  $r_1 = 3 r_2$  ist  $r_1^2 - r_2^2 = 8 r_2^2$ , und es folgt

$$F_4 = \frac{\pi (180^\circ - \alpha)}{360^\circ} \cdot 8 r_2^2.$$

Um die Forderung  $F_3 = F_4$  zu erfüllen, hat man folglich  $\alpha$  so zu wählen, daß

$$\frac{r_2^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi (180^\circ - \alpha)}{360^\circ} \cdot 8 r_2^2 \text{ gilt.}$$

Aus dieser Gleichung folgt nach Multiplikation mit  $360^\circ$  und Division durch  $\pi \cdot r_2^2$

$$\alpha = 8 \cdot (180^\circ - \alpha)$$

$$\alpha = 8 \cdot 180^\circ - 8 \alpha$$

$$9 \alpha = 8 \cdot 180^\circ$$

$$\alpha = 8 \cdot 20^\circ$$

$$\alpha = 160^\circ$$

Für den Winkel  $\sphericalangle A_1 M D_1$  hat man also die Größe  $160^\circ$  zu wählen.

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 8                      Gesamtpunktzahl: 40

280821

Die Punktaufteilung auf das Herleiten der Antworten zu a) und b) kann je nach dem Lösungsweg unterschiedlich ausfallen. Einzuschätzen ist:

Gewinnung vorbereitender Aussagen (z. B. über den Teilweg des Tankers bis zur Startzeit des Frachters ( $\frac{2}{3}$  der Route) oder: Gewinnung von Bestimmungsgleichungen)

4 Punkte

Gewinnung einer weiterführenden Aussage (z. B. Relativgeschwindigkeit  $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{3}{20}$  oder: Gewinnung einer Gleichung für nur eine Unbekannte

3 Punkte

Abschließende Gewinnung der drei Antworten: eine (aufwendigere)  
die beiden anderen

2 }  
je 1 } 4 Punkte  
11 Punkte

(Wird ein richtiges Ergebnis angegeben, ohne daß der Gedankengang klar erkennbar ist, kann jeweils höchstens 1 Punkt erteilt werden.)

280822

Aufwendigerer Teilnachweis (z. B. zu "höchstens zwei der Zahlen durch 3 teilbar" oder: Einführung einer Fallunterscheidung, Behandlung eines Falles) 4 Punkte

Weiterer Teilnachweis (z. B. zu "mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar" oder: Behandlung der übrigen Fälle)

3 Punkte

7 Punkte

280823

a) Anwendung von Sätzen (z. B. Kongruenzsatz) zur Herleitung einer Teilaussage über Winkel (z. B.  $\sphericalangle NBC = \sphericalangle MCD$ ) 3 Punkte

Schluß auf  $CM \perp BN$  2 Punkte

b) Herleitung einer Teilaussage über Flächeninhalte (z. B. Inhalt von DCBPM größer als  $\frac{1}{2}a^2$ ) 4 Punkte

Schluß auf Verschiedenheit von ABM und BPM 2 Punkte

11 Punkte

280824

a) Richtige Formel (oder Ermittlungsvorschrift) für Viertelkreisflächeninhalt 1 Punkt

Richtige Formel (oder Ermittlungsvorschrift) für Viertelkreisringflächeninhalt 1 Punkt

Rechnerisch richtige Herleitung von  $F_1:F_2=1:8$  2 Punkte

b) Richtige Formel (oder Ermittlungsvorschrift) für Kreisausschnitt 1 Punkt

Richtige Formel (oder Ermittlungsvorschrift) für Kreisringausschnitt 2 Punkte

Gewinnung einer (z. B. als Gleichung geschriebenen) Bedingung für  $\alpha$  2 Punkte

Rechnerisch richtige Herleitung von  $\alpha$  2 Punkte

11 Punkte

(Ermittelt ein Schüler das richtige Verhältnis unter Verwendung von Näherungswerten, ohne die Zulässigkeit seiner Verfahrensweise nachzuweisen, können für a) maximal 2, für b) maximal 3 Punkte erteilt werden. Wird mit speziellen (vom Schüler gewählten) Radien gearbeitet und so ein richtiges Ergebnis ermittelt, können für a) 1 Punkt und für b) höchstens 2 Punkte erteilt werden.)