A 11/12; I

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

291241

Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \qquad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

291242

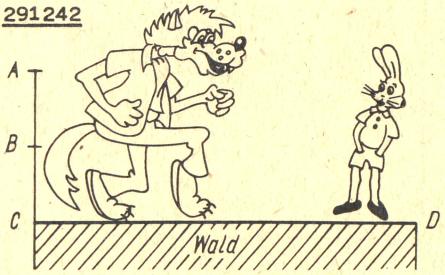

Abb. A 291242

Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Abb. A 291242). In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befinde sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C. Dabei sei $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und $\overline{CD} = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase. Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefaßt, wenn die Strecke AX einen

Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, daß er nicht unterwegs vom Wolf gefaßt wird.

291243

Man beweise: Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen $a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen, gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm^2 gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

291244

Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17, \qquad (1)$$

$$x^2 - 3y + 2z = 9. \qquad (2)$$

291245

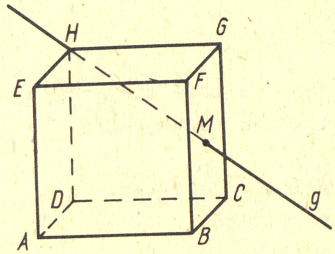

Abb. A 291245

Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie in Abbildung A 291245 mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet. Die Ebene, in der A, B, C, D liegen, sei ε_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen, sei ε_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates BCGF sei g genannt.
Man beweise, daß es unter allen Strecken, die einen Punkt von ε_1 mit einem Punkt von ε_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt. Man ermittle diese kleinste Länge.

291246 A

In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln. Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot. Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hinein-

gelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden. Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare (m;n) von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ rot ist.

Hinweis: Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, daß für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist. Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als "günstig" und M-G als "ungünstig" angesehen und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines "günstigen" Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

291246 B

Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.

(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

(3) Für jede reelle Zahl x gilt $n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

291241) Lösung: 7 Punkte

(A) Zurückführung auf eine einfachere Gleichung (2)

I. Wenn für eine reelle Zahl a die Gleichung (1) eine reelle Zahl x als Lösung hat, so ist diese auch Lösung der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = x. \qquad (2)$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert die linke Seite der Gleichung (1), also auch $\sqrt{x}$; d. h., es gilt $x \geqq 0$, und auch die linke Seite von (2) existiert.

Wäre nun erstens $a + \sqrt{x} > x$, so folgte ($a + \sqrt{x} > 0$, also die Existenz von $\sqrt{a + \sqrt{x}}$, und) $a + \sqrt{a + \sqrt{x}} > a + \sqrt{x} > x$ und ebenso der Reihe nach $a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} > a + \sqrt{x} > x$,

$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} > a + \sqrt{x} > x$ im Widerspruch gegen die Voraussetzung (1).

Wäre aber zweitens $a + \sqrt{x} < x$, so folgte: Entweder gilt $a + \sqrt{x} < 0$, also existiert $\sqrt{a + \sqrt{x}}$ nicht und daher auch die linke Seite von (1) nicht, oder es gilt $a + \sqrt{a + \sqrt{x}} < a + \sqrt{x} < x$. Entsprechend folgt der Reihe nach, daß entweder eine der Wurzeln auf der linken Seite von (1) nicht existiert oder daß die linke Seite von (1) zwar existiert, aber kleiner als x ist, ebenfalls im Widerspruch gegen (1).

Also verbleibt nur die Möglichkeit $a + \sqrt{x} = x$, d. h. (2).

II. Umgekehrt gilt: Wenn für eine reelle Zahl a die Gleichung (2) eine reelle Zahl x als Lösung hat, so ist diese auch Lösung der Gleichung (1).

Beweis: Nach Voraussetzung existiert die linke Seite von (2), also auch $\sqrt{x}$; d. h., es gilt $x \geqq 0$, man erhält $a + \sqrt{x} = x \geqq 0$ und der Reihe nach die Existenz der Wurzeln in (1) sowie die

Gleichungen

$$a + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a + \sqrt{x} = x,\ a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} = a + \sqrt{x} = x,$$

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = a + \sqrt{x} = x, \text{ also (1).}$$

<u>(B) Lösen der Gleichung (2)</u>

III. Wenn für eine reelle Zahl a die Gleichung (2) eine reelle Zahl x als Lösung hat, so folgt

$$x - a = \sqrt{x}, \tag{3}$$

wegen $\sqrt{x} \geqq 0$ also einerseits

$$x \geqq a; \tag{4}$$

andererseits folgt aus (3)

$$(x - a)^2 = x, \tag{5}$$

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{2a + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a + 1}{4}\right)^2 - a^2 = \frac{4a + 1}{4}. \tag{6}$$

Daher gilt $4a + 1 \geqq 0$, d. h.

$$a \geqq -\frac{1}{4}, \tag{7}$$

und x ist eine der Zahlen

$$x_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot (2a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}). \tag{8}$$

Ist insbesondere $x = x_2 = \frac{1}{2} \cdot (2a + 1 - \sqrt{4a + 1})$, so folgt wegen (4) außerdem

$$2a + 1 - \sqrt{4a + 1} \geqq 2a, \tag{9}$$

also

$$\sqrt{4a + 1} \leqq 1, \tag{10}$$

$$a \leqq 0. \tag{10}$$

IV. Umgekehrt erhält man:

Gilt (7), so existieren die in (8) genannten Zahlen, weiter folgt

$$4a + 1 \leqq 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2; \tag{11}$$

wegen

$$2a + 1 \geqq -\frac{1}{2} + 1 > 0$$

ergibt sich daher $\sqrt{4a + 1} \leqq 2a + 1$, d. h.

$$2a + 1 - \sqrt{4a + 1} \geqq 0. \tag{12}$$

Außerdem folgt auch

$$2a + 1 + \sqrt{4a + 1} \geqq 2a + 1 > 0.$$

Also gilt für beide Zahlen in (8): Ist x eine dieser Zahlen, so ist $x \geqq 0$, demnach existiert die linke Seite von (2); ferner erfüllt x die Gleichung (6) und daher (5).

Für $x = x_1 = \frac{1}{2} \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a + 1})$ gilt weiterhin $x \geqq \frac{1}{2} \cdot (2a + 1) > a$, also kann man aus (5) auf (3) und damit auf (2) schließen.

Gilt außer (7) auch (10), so erhält man (9) und kann auch für $x = x_2$ mit (4) auf (3) und (2) schließen. Die (in diesem Fall somit als Lösung von (2) bestätigten) Werte (8) sind genau dann einander gleich, wenn $a = -\frac{1}{4}$ ist; hierfür wird $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$.

Gilt statt (10) aber $a > 0$, so ergibt sich: Statt (9) gilt $2a + 1 - \sqrt{4a + 1} < 2a$, $x_2 < a$; für $x = x_2$ folgt aus (5) anstelle von (3) die Gleichung $x - a = -\sqrt{x}$, ferner entfällt in (11) und folglich in (12) die Möglichkeit des Gleichheitszeichens, d. h., es ist $x > 0$, und damit gilt $a + \sqrt{x} > a - \sqrt{x} = x$, also ist (2) für $x = x_2$ nicht erfüllt.

<u>Zusammenfassung:</u> Mit I. bis IV. ist insgesamt bewiesen:

Für $a < -\frac{1}{4}$ hat (1) keine reelle Lösung x.

Für $a \geqq -\frac{1}{4}$ gilt: Als reelle Lösung von (1) gibt es

für $a = -\frac{1}{4}$ genau die Zahl $x = \frac{1}{4}$,

für $-\frac{1}{4} < a \leqq 0$ genau die zwei Zahlen $x_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot (2a + 1 \pm \sqrt{4a + 1})$,

für $a > 0$ genau die Zahl $x = \frac{1}{2} \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a + 1})$.

<u>Bemerkungen:</u>

Zum Auffinden (und auch beim Beweis) der Überführung von (1) in (2) verwendbar ist folgendes Motiv: In einem x,y-Koordinatensystem gehe man von einem Punkt zu dem Punkt mit gleicher Abszisse über, der auf der Kurve $y = a + \sqrt{x}$ liegt. Von diesem Punkt gehe man zum Bildpunkt bei Spiegelung an der Geraden $y = x$ über. Wiederholt man diese Übergänge abwechselnd mehrmals, so erhält man zu beliebigem $x \geqq 0$ die Ordinate $a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}$ (falls dieser Term existiert). Man stellt fest, daß alle erhaltenen Punkte zusammenfallen, wenn x Abszisse eines Schnittpunktes von $y = a + \sqrt{x}$ mit $y = x$ war. So kann man zu einer Beweisvariante von (A)II. gelangen. Auch für Teil (B) kann die Betrachtung der Kurven $y = a + \sqrt{x}$ und $y = x$ von Nutzen sein, z. B. bei der Anzahlermittlung reeller Lösungen.

291242) Lösung: **6 Punkte**

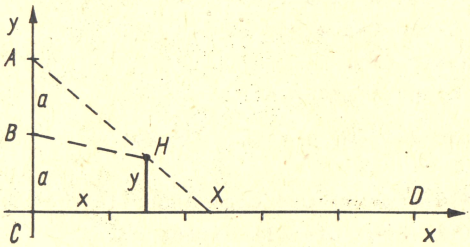

Abb. L 291242 a

Man lege ein Koordinatensystem so, daß C, B, A, D die Koordinaten (0;0), (0;a), (0;2a) bzw. (5a;0) haben (Abb. L 291242 a). Hat ein beliebiger Punkt H der Ebene die Koordinaten (x;y) und bezeichnet v die größtmögliche Geschwindigkeit des Wolfs, also 2v die des Hasen, so erreicht der Hase den Punkt H geradlinig in der Zeit $t_1 = \frac{\overline{AH}}{2v}$ und der Wolf frühestens in der Zeit $t_2 = \frac{\overline{BH}}{v}$. Der Wolf kann somit genau dann den Punkt H weder gleichzeitig mit dem Hasen noch sogar eher als dieser erreichen, wenn für diese Zeiten $t_1 < t_2$ gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit

$$\overline{AH} < 2 \cdot \overline{BH},$$
$$\sqrt{x^2 + (y - 2a)^2} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + (y - a)^2},$$
$$3x^2 + 3y^2 - 4ay > 0,$$
$$x^2 + (y - \tfrac{2}{3}a)^2 > (\tfrac{2}{3}a)^2. \qquad (1)$$

Damit ist gezeigt, daß der Hase durch Wahl seines Zielpunktes X genau dann erreicht, nicht unterwegs vom Wolf gefaßt zu werden, wenn die Koordinaten aller Punkte der Strecke AX die Ungleichung (1) erfüllen. Das trifft genau dann zu, wenn die Strecke AX vollständig außerhalb desjenigen Kreises k liegt, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $(0;\frac{2}{3}a)$ hat und dessen Radius $\frac{2}{3}a$ beträgt (Abb. L 291242 b).

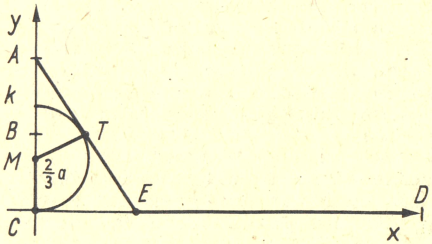

Abb. L 291242 b

Es sei nun E der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit derjenigen von A an k gelegten Tangente, die die positive x-Achse schneidet. Für diesen Punkt E und für den Berührungspunkt T der Tangente gilt $\overline{TM} = \frac{2}{3}a$, $\overline{MA} = \frac{4}{3}a$ und $\overline{\sphericalangle MTA} = 90^\circ$, also $\Delta CEA \sim \Delta TMA$, $\overline{CE}:\overline{EA} = \overline{TM}:\overline{MA} = 1:2$, $\overline{EA} = 2 \cdot \overline{CE}$, $\overline{CA} = \overline{CE}\sqrt{3}$, $\overline{CE} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$. Insbesondere liegt daher

wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} < 5$ der Punkt E auf der Strecke CD, und es ist bewiesen: Die gesuchten Zielpunkte X sind genau die auf der Verlängerung von CE über E hinaus gelegenen Punkte der Strecke CD, d. h. genau die Punkte X auf CD mit $\overline{CX} > \frac{2}{3}\, a\sqrt{3}$.

НУ, ПОГОДИ!

Bemerkung:

Zum Nachweis, daß $\overline{AH} < 2 \cdot \overline{BH}$ genau für alle Punkte H außerhalb k gilt, kann man auch durch Verwendung des Satzes über den Apolloniuskreis kommen. Dieser Kreis (der Kreis über derjenigen Strecke PC als Durchmesser, deren Endpunkte die Strecke AB innen bzw. außen im gegebenen Verhältnis 2:1 teilen) ist die Menge aller derjenigen Punkte H, für die $\overline{AH}:\overline{BH} = 2:1$ gilt. Der Satz kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder (z. B. mit Hilfe von Sätzen über Winkelhalbierende und ihren Schnitt mit der Gegenseite im Dreieck) bewiesen werden. Damit entsteht auch eine Lösungsmöglichkeit ohne Koordinatenbenutzung.

291243) Lösung:

Für die positiven ganzen Zahlen $u = a + d$, $v = b + d$ gilt
$u^2 + v^2 = a^2 + b^2 + 2(a+b)d + 2d^2$,
nach Voraussetzung also

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= a^2 + b^2 + 2(c-d)d + 2d^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2cd \\ &= a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2. \end{aligned}$$

In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Kathetenlängen die Maßzahlen u und v haben, hat folglich die Hypotenusenlänge die positive ganze Zahl $w = a + b$ als Maßzahl.
Der Flächeninhalt dieses Dreiecks hat die Maßzahl

$$\frac{1}{2}\, u \cdot v = \frac{1}{2}\,(ab + (a+b+d)d),$$

nach Voraussetzung also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, u \cdot v &= \frac{1}{2}\,(ab + cd) \\ &= ab. \end{aligned}$$

Damit ist der geforderte Beweis geführt.

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker
der Deutschen Demokratischen Republik
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

291244) Lösung: **6 Punkte**

I. Wenn für ein Tripel (x,y,z) natürlicher Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) gilt, so folgt:
Multiplikation von (1) mit 2, von (2) mit 3 und anschließende Addition ergibt $3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61$;
nach Multiplikation mit 48 folgt

$$16 \cdot (3x + 1)^2 + 3 \cdot (8y - 9)^2 = 3187.$$

Mit $a = (3x + 1)^2,\ b = (8y - 9)^2$ (3)
folgt daraus $16a + 3b = 3187.$ (4)
Da x,y natürliche Zahlen sind (und hierfür stets $8y \neq 9$ gilt), sind a und b wegen (3) ganze Zahlen mit $a > 0$ und $b > 0$. Aus (4) folgt

$$b = 1062 - 5a + \frac{1 - a}{3}, \qquad (5)$$

also ist die Zahl

$$c = \frac{1 - a}{3} \qquad (6)$$

eine ganze Zahl. Für sie gilt

$$a = 1 - 3c. \qquad (7)$$

Aus (5) folgt damit

$$b = 1057 + 16c. \qquad (8)$$

Wegen $a \geqq 1$ und $b \geqq 1$ folgt aus (7) und (8)

$$c \leqq 0 \text{ und } c \geqq -66, \text{ also } -66 \leqq c \leqq 0. \qquad (9)$$

Aus (9) und (7) folgt

$$1 \leqq a \leqq 199. \qquad (10)$$

Die Zahl a ist folglich nach (3) eine Quadratzahl mit der Eigenschaft (10) und nach (7) nicht durch 3 teilbar. Die Zahl b ist ebenfalls nach (3) eine Quadratzahl.
Die weiteren Lösungsschritte werden tabellarisch dargestellt. In der Spalte x, y werden dabei die Gleichungen (3) nach x bzw. y aufgelöst; es entfallen dann diejenigen Lösungen, die keine natürlichen Zahlen sind:

a	c (nach (6))	b (nach (8))	Quadratzahl?	x	y
1	0	(1057	nein)		
4	-1	(1041	nein)		
16	-5	(977	nein)		
25	-8	(929	nein)		
49	-16	(801	nein)		
64	-21	(721	nein)		
100	-33	529	ja	3 (und $-\frac{11}{3}$)	4 (und $-\frac{7}{4}$)
121	-40	(417	nein)		
169	-56	(161	nein)		
196	-65	(17	nein)		

Aus $x = 3$, $y = 4$ und (2) folgt $z = 6$.

Somit kann nur das Tripel (3,4,6) aus natürlichen Zahlen bestehen und das Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

II. Tatsächlich erfüllt dieses Tripel das System (1), (2); denn

es gilt $3 + 32 - 18 = 17$

und $9 - 12 + 12 = 9$.

<u>Anderer Lösungsweg:</u>

Wenn für ein Tripel (x,y,z) natürlicher Zahlen das Gleichungssystem (1), (2) gilt, dann folgt wie im 1. Lösungsweg

$$3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61. \qquad (3)$$

Setzt man für alle natürlichen Zahlen x,y

$$f(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2),$$

$$g(y) = 4y^2 - 9y = y(4y - 9),$$

so erfüllen x und y aus dem Tripel (x,y,z), das (1) und (2) erfüllt, nach (3) folglich auch $f(x) + g(y) = 61$. (4)

Nun ist f im Bereich aller $x \geqq 0$ streng monoton wachsend, und es gilt

$f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=16$, $f(3)=33$, $f(4)=56$, $f(5)=85$. (5)

Ferner ist g im Bereich aller $y \geqq 3$ streng monoton wachsend, und es gilt

$g(0)=0$, $g(1)=-5$, $g(2)=-2$, $g(3)=9$, $g(4)=28$, $g(5)=55$, $g(6)=90$. (6)

Für alle natürlichen Zahlen y gilt folglich $g(y) \geqq -5$, also $61 - g(y) \leqq 61 + 5 = 66$.

Wegen (5) und des streng monotonen Wachsens von f kann daher (4), d. h. $f(x) = 61 - g(y)$, nur mit einem der x-Werte 0, 1, 2, 3, 4 gelten; für diese hat $61 - f(x)$ die Werte 61, 56, 45, 28, 5.

Wegen (6) und des streng monotonen Wachsens von g kann daher die Gleichung $g(y) = 61 - f(x)$ nur für $x = 3$ eine Lösung y in natürlichen Zahlen x,y haben, und zwar nur mit $y = 4$.

Wie im 1. Lösungsweg folgt $z = 6$ und die anschließend erforderliche Probe (Bestätigung von (1), (2)).

Anderer Lösungsweg:

In einem geeigneten Koordinatensystem haben B, C, A, F die Koordinaten (0;0;0), (a;0;0), (0;a;0) bzw. (0;0;a). Darin haben M, H die Koordinaten $(\frac{a}{2};0;\frac{a}{2})$ bzw. (a;a;a), also ist g die Menge aller Punkte mit Koordinaten $(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot t;\ at;\ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot t)$, wo t alle reellen Zahlen durchläuft, oder, für $s = \frac{1}{2}(1+t)$, die Menge aller Punkte mit Koordinaten (as;a(2s-1);as), wo s die Menge aller reellen Zahlen durchläuft. Die Ebene ε_1 ist die Menge aller Punkte mit Koordinaten (x;y;0), die Ebene ε_2 ist die Menge aller Punkte mit Koordinaten (v;0;w). Der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier solcher Punkte hat die Koordinaten $(\frac{x+v}{2};\frac{y}{2};\frac{w}{2})$; er liegt genau dann auf g, wenn eine reelle Zahl s mit

$$\frac{x+v}{2} = as,\ \frac{y}{2} = a(2s-1),\ \frac{w}{2} = as$$

existiert. Das gilt genau dann, wenn x,y,v,w die Bedingungen

$$x + v = w,$$
$$y = 2w - 2a$$

erfüllen. Das Quadrat der zu betrachtenden Streckenlängen ist

$$\begin{aligned} Q &= (x - v)^2 + y^2 + w^2 \\ &= (w - 2v)^2 + (2w - 2a)^2 + w^2 \\ &= (w - 2v)^2 + 5w^2 - 8aw + 4a^2 \\ &= (w - 2v)^2 + \frac{1}{5}((5w - 4a)^2 + 4a^2). \end{aligned}$$

Es nimmt einen kleinsten Wert an, nämlich (genau) dann, wenn

$$w - 2v = 0 \text{ und } 5w - 4a = 0$$

gilt (diese Gleichungen sind erfüllbar:

$$w = \frac{4}{5}a,\ v = \frac{2}{5}a;\ x = \frac{2}{5}a,\ y = -\frac{2}{5}a;\ s = \frac{2}{5}).$$

Der kleinste Wert von Q ist $\frac{4}{5}a^2$, die gesuchte kleinste Länge beträgt $\sqrt{Q} = \frac{2a}{5}\sqrt{5}$.

291245) Lösung: 7 Punkte

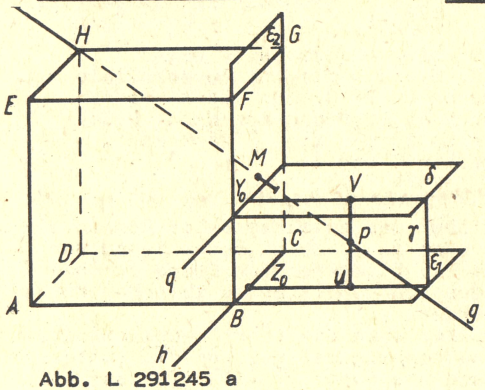

Abb. L 291245 a

Die Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden sich in der Geraden h durch B, C.
Es sei P ein beliebiger Punkt auf g. Das Lot von P auf ε_1 habe den Fußpunkt U, ferner sei V derjenige Punkt auf der Verlängerung von $\overline{UP}$ über P hinaus, für den $\overline{UP} = \overline{PV}$ gilt, und δ sei die zu ε_1 parallele Ebene durch V (Abb. L 291245 a).
Nach dem Strahlensatz und seiner Umkehrung ist δ die Menge der Endpunkte Y aller derjenigen Strecken XY, deren Endpunkt X in ε_1 liegt und deren Mittelpunkt P ist.

Die (wegen $\delta \parallel \varepsilon_1$ zu h parallele) Schnittgerade q von δ mit ε_2 ist folglich die Menge der Endpunkte Y aller Strecken XY mit X in ε_1, Y in ε_2 und mit P als Mittelpunkt; für jede solche Strecke ist $\overline{XY} = 2 \cdot \overline{PY}$.

Das Lot UZ_0 von U auf ε_2 verläuft wegen $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ in ε_1, sein Fußpunkt Z_0 liegt also auf h. Das Lot VY_0 von V auf ε_2 verläuft wegen $\delta \parallel \varepsilon_1$ in δ, sein Fußpunkt Y_0 liegt also auf q. Beide Lote sind parallel zu AB, hiernach und wegen $UV \parallel BF$ liegen folglich die Punkte U, V, Y_0, Z_0 in einer zu q und h senkrechten Ebene γ. Also ist einerseits PY_0 das Lot von P auf q und daher $\overline{PY_0}$ unter allen Längen $\overline{PY}$ mit Y auf q die kleinste; andererseits folgt wegen $\overline{PU} = \overline{PV}$ im Rechteck UVY_0Z_0 (oder dessen Entartungen mit $U \equiv Z_0$, $V = Y_0$ oder $U = V$, $Z_0 = Y_0$) auch $\overline{PY_0} = \overline{PZ_0}$, und PZ_0 ist auch das Lot von P auf h.

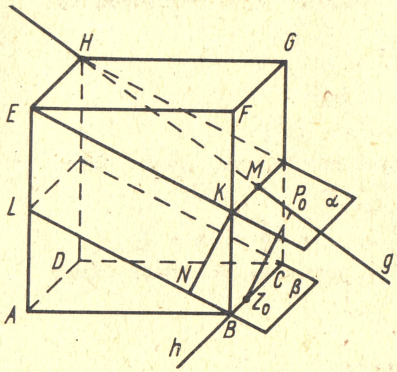

Abb. L 291245 b

Nun gibt es unter allen von Punkten $P \in g$ auf h gefällten Loten PZ_0 eines mit kleinster Länge; dies ist nämlich das zu den windschiefen Geraden g, h gehörende[1] gemeinsame Lot P_0Z_0, das sogar unter allen[2] Strecken PZ mit $P \in g$, $Z \in h$ kleinste Länge hat. Diese Länge ist der Abstand, den die sowohl zu g als auch zu h parallelen Ebenen α und β durch g bzw. h voneinander haben (Abb. L 291245 b). Das Zweifache dieser Länge ist die in der Aufgabe als existierend nachzuweisende Länge; dieser Nachweis ist hiermit geführt.

Sind K, L die Mittelpunkte von BF bzw. AE, so ist α wegen $EH \parallel KM \parallel h$ die Ebene durch E, K, M und β die hierzu parallele Ebene durch B, also die Ebene durch L, B, C. Das Lot KN von K auf BL verläuft in der Ebene durch A, B, F und ist daher außer zu BL auch zur Richtung von H, also zu (α und) β senkrecht. Folglich ist $\overline{KN}$ der Abstand zwischen α und β.

---

1 Die hier verwendeten Aussagen über das gemeinsame Lot können als bekannter Sachverhalt zitiert oder z. B. durch Heranziehen der Schnittgeraden g' von β mit der zu h senkrechten Ebene durch g sowie unter mehrmaliger Anwendung der Ungleichung zwischen Katheten und Hypotenuse bewiesen werden.

2 Aus diesem Grunde hätte man weiter oben die (dort deutlichkeitshalber angeführte) Feststellung der Minimalität von $\overline{PY_0}$ (unter allen $\overline{PY}$ mit festem P) weglassen und durch $\overline{PY} = \overline{PZ}$ (für das Lot YZ von Y auf h) ersetzen können.

Aus $\overline{\sphericalangle KBN} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle LBA} = \overline{\sphericalangle BLA}$, $\Delta KBN \sim \Delta BLA$, $\overline{KN}:\overline{NB} = \overline{BA}:\overline{AL} = 2:1$ folgt $\overline{BK} = \sqrt{\overline{KN}^2 + (\frac{1}{2}\overline{KN})^2} = \frac{1}{2}\overline{KN}\sqrt{5}$, und für die gesuchte Länge ergibt sich der Wert $2 \cdot \overline{KN} = \frac{4 \cdot \overline{BK}}{\sqrt{5}} = \frac{2a}{5}\sqrt{5}$.

<u>291246 A) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

1. Für jeden Zug, bei dem eine Kugel aus der Urne A in die Urne B gelegt wird, gibt es genau m gleichwahrscheinliche Möglichkeiten, während es genau n + 1 gleichwahrscheinliche Möglichkeiten gibt, eine Kugel dann aus B in A zu legen. Insgesamt gibt es daher für die Folge der ersten vier Züge genau $N = m^2(n+1)^2$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

2. Es bezeichne U(k,r) die Anzahl der Möglichkeiten dafür, daß sich nach Durchführung der ersten k Züge genau r rote Kugeln in der Urne B befinden.

   2.1. Nach dem ersten Zug, für den es genau m Möglichkeiten gibt, ist in B bei jeder dieser m Möglichkeiten genau eine rote Kugel und bei keiner dieser Möglichkeiten keine rote Kugel; d. h., es gilt

   $$U(1,1) = m,\ U(1,0) = 0.$$

   2.2. Nach den ersten beiden Zügen befindet sich in B entweder keine oder genau eine rote Kugel. Weil es für den ersten Zug genau m Möglichkeiten gab und weil für den zweiten Zug unter den zur Verfügung stehenden Kugeln genau n blau sind und genau eine rot ist, gilt somit

   $$U(2,1) = n \cdot U(1,1) = nm,\ U(2,0) = U(1,1) = m.$$

   2.3. Nach den ersten drei Zügen ist die Anzahl der roten Kugeln in der Urne B entweder 1 oder 2. Der erste dieser Fälle tritt genau dann ein, wenn entweder nach dem zweiten Zug die Urne B keine rote Kugel enthielt und eine rote Kugel hineingelegt wurde oder genau eine rote Kugel in B lag und eine blaue hinzukam. Folglich gilt

   $$U(3,1) = m \cdot U(2,0) + U(2,1) = m^2 + mn.$$

   Entsprechend begründet man

   $$U(3,2) = (m-1) \cdot U(2,1) = (m-1)mn.$$

   2.4. Nach 2.3. ist die Anzahl derjenigen Möglichkeiten für die Folge der ersten vier Züge, bei denen der vierte Zug mit einer roten Kugel ausgeführt wird, gleich

   $$U(3,1) + 2 \cdot U(3,2) = m^2 + mn + 2(m-1)mn = m(2mn + m - n).$$

3. Aus 1. und 2. folgt: Eine Vorgabe von m und n hat genau dann die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft, wenn

   $$m(2mn + m - n) = \frac{1}{2} \cdot m^2(n+1)^2 \qquad (1)$$

   gilt. Trifft dies zu, so gilt: Wegen $m \neq 0$ ist

   $$m - 2n + 2mn - mn^2 = 0, \qquad (2)$$

woraus folgt, daß einerseits m ein Teiler von 2n ist, andererseits aber m von n geteilt wird. Somit gilt $m = tn$ mit $t = 1$ oder $t = 2$. Setzt man dies in (2) ein, so erhält man für $t = 1$ die Gleichung

$$-n + 2n^2 - n^3 = 0,$$

also

$$n(n-1)^2 = 0,$$

die wegen $n = m$ und $n+m > 2$ keine Lösung hat. Dagegen liefert $t = 2$ die Gleichung

$$4n^2 - 2n^3 = 0,$$

und wegen $n = \frac{1}{2} m \neq 0$ kann nur $n = 2$, $m = 4$ Lösung sein. In der Tat erfüllen diese Zahlen die Gleichung (1).

Somit hat genau die Vorgabe von 4 roten und 2 blauen Kugeln die verlangte Eigenschaft.

<u>291246 B) Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Angenommen, f sei eine Funktion, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt. Dann folgt aus (3), angewandt mit $x = 0$,

$$f(0) = 0.$$

Wendet man (3) mit $\frac{x}{n}$ statt x an, so ergibt sich, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n} \tag{4}$$

gilt.

Durch vollständige Induktion folgt (siehe Anmerkung III.), daß für alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$ und jede reelle Zahl x die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{n^m} \cdot f\left(\frac{x}{n^m}\right) + \frac{x}{n^{2m-1}} + \frac{x}{n^{2m-3}} + \dots + \frac{x}{n} \tag{5}$$

gilt.

Für jede reelle Zahl x gilt daher

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{n^m} \cdot f\left(\frac{x}{n^m}\right) + \lim_{m \to \infty} \left(\frac{x}{n^{2m-3}} + \frac{x}{n^{2m-3}} + \dots + \frac{x}{n}\right),$$

falls diese beiden Grenzwerte existieren. Nun ist in der Tat

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{x}{n^{2m-1}} + \frac{x}{n^{2m-3}} + \dots + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{nx}{n^2 - 1};$$

ferner gilt wegen $n > 1$ und nach (2)

$$\lim_{m \to \infty} f\left(\frac{x}{n^m}\right) = f\left(\lim_{m \to \infty} \frac{x}{n^m}\right) = f(0) = 0$$

und daher auch

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{n^m} \cdot f\left(\frac{x}{n^m}\right) = 0.$$

Somit kann nur die durch

$$f(x) = \frac{nx}{n^2 - 1} \tag{6}$$

definierte Funktion f die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen.

II. Sie erfüllt (1) und (2) sowie wegen

$$f(x) + nx = \frac{nx + n^3x - nx}{n^2 - 1} = n \cdot \frac{n \cdot nx}{n^2 - 1} = n \cdot f(nx)$$

auch (3).

Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt also: Genau die in (6) definierte Funktion f genügt den Bedingungen der Aufgabe.

III. Anmerkung Der Beweis durch vollständige Induktion kann wie folgt geführt werden:

a) Für $m = 1$ gilt (5), da f der Gleichung (4) genügt.

b) Wenn $k \geqq 1$ ist und (5) für $m = k$ gilt, d. h., wenn

$$f(x) = \frac{1}{n^k} \cdot f\left(\frac{x}{n^k}\right) + \frac{x}{n^{2k-1}} + \frac{x}{n^{2k-3}} + \dots + \frac{x}{n} \tag{7}$$

gilt, so folgt:

Da (4) auch mit $\frac{x}{n^k}$ anstelle von x gilt, ergibt sich

$$f\left(\frac{x}{n^k}\right) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) + \frac{x}{n^{k+1}}; \tag{8}$$

aus (7) und (8) folgt

$$f(x) = \frac{1}{n^{k+1}} f\left(\frac{x}{n^{k+1}}\right) + \frac{x}{n^{2k+1}} + \frac{x}{n^{2k-1}} + \frac{x}{n^{2k-3}} + \dots + \frac{x}{n},$$

d. h. (5) für $m = k+1$.

<u>Anderer Lösungsweg:</u>

I. Angenommen, f und g seien zwei Funktionen, die beide den (für g entsprechend umzuformulierenden) Bedingungen (1), (2), (3) genügen. Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl und hierzu

$c = f(x_0) - g(x_0)$.

Dann folgt aus (3), mit $x = \frac{x_0}{n}$ auf f und g angewandt,

$$c = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right) - g\left(\frac{x_0}{n}\right)\right).$$

Durch vollständige Induktion beweist man hieraus für jedes natür-

liche $k \geqq 1$

$$n^k \cdot c = f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) - g\left(\frac{x_0}{n^k}\right).$$

Wegen (2) existieren mit $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ auch

die Grenzwerte $\lim\limits_{k \to \infty} f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = f\left(\lim\limits_{k \to \infty} \frac{x_0}{n^k}\right) = \left[f(0)\right]$

und $\lim\limits_{k \to \infty} g\left(\frac{x_0}{n^k}\right) \quad \left[= g(0)\right]$, also existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} (n^k \cdot c).$$

Das ist aber nur für $c = 0$ möglich.
Da diese Schlüsse mit jeder beliebigen reellen Zahl x_0 ausgeführt werden können, gilt folglich $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x.
Es kann also höchstens eine Funktion f geben, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.

II. Die oben in (6) definierte Funktion genügt diesen Bedingungen (Nachweis wie im 1. Lösungsweg).

Eine weitere Beweisvariante besteht darin, aus (3) mit dem Ansatz $f(x) = a + b$ sogleich $b = 0$, $a = \frac{n}{n^2 - 1}$ zu erhalten, dann für die Funktion $c(x) = f(x) - \frac{nx}{n^2 - 1}$ die Bedingungen (1), (2) und $c(x) = \frac{1}{n} \cdot c\left(\frac{x}{n}\right)$ herzuleiten und daraus ähnlich wie oben $c(x) = 0$ für alle x zu beweisen.