

XXX. Olympiade Junger Mathematiker  
der Deutschen Demokratischen Republik  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Olympiadeklasse 6

**Achtung:** Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

300621

a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat ABCD mit den Eckpunkten

$$A(1;1), B(5;1), C(5;5), D(1;5)$$

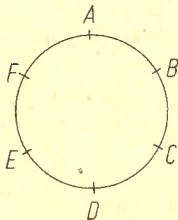
und das Quadrat PQRS mit den Eckpunkten

$$P(9;1), Q(13;1), R(13;5), S(9;5)$$

ein!

b) Gibt es eine Spiegelung, bei der das Quadrat PQRS das Bild des Quadrates ABCD ist? Wenn dies der Fall ist, gibt die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

**Hinweis:** Wenn das Quadrat PQRS das Bild des Quadrates ABCD ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

300622

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abb. A 300622a) so ändern, daß in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann: Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abb. A 300622a) als Nachbarn hatte.

Abb. A 300622a

A 6

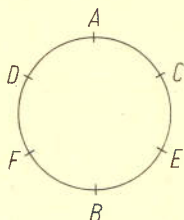


Abb. A 300622b

a) Abbildung A 300622b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, daß tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!

| Person | Nachbarn<br>in Abb. a | Nachbarn<br>in Abb. b |
|--------|-----------------------|-----------------------|
| A      |                       |                       |
| B      |                       |                       |
| C      |                       |                       |
| D      |                       |                       |
| E      |                       |                       |
| F      |                       |                       |

b) Gib alle weiteren Möglichkeiten einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an! Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind.

Eine Begründung wird nicht verlangt.

300623

Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

| Ziffer    | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Stückzahl | 350 | 340 | 320 | 340 | 360 | 310 | 300 | 320 | 320 | 340 |

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden. Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

300624

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen  $n$ , die sich in der Form  $n = 5a + 7b$  darstellen lassen, wobei  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen sind!

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR  
 2. Stufe (Kreisolympiade)  
Lösungen und Punktbewertung  
 Olympiadeklasse 6

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

**300621) Lösung:****9 Punkte**

- a) Abbildung L 300621 zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.
- b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade  $g$  und eine Konstruktion dieser Geraden.
- c) Das Drehzentrum ist  $Z(7;3)$ , der Drehwinkel beträgt  $180^\circ$ .

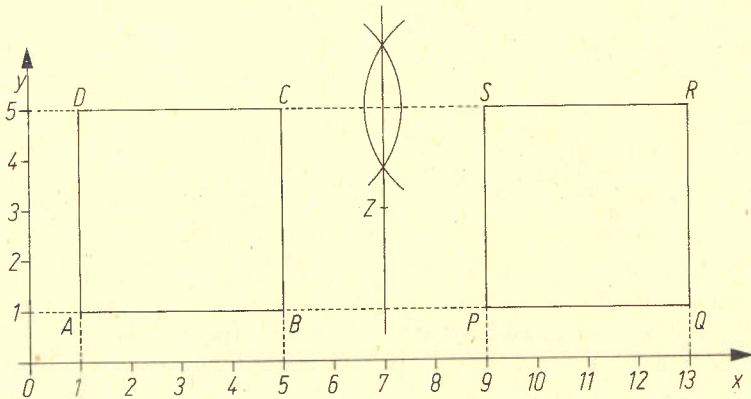


Abb. L 300621

a)

| Person | Nachbarn in Abb. a | Nachbarn in Abb. b |
|--------|--------------------|--------------------|
| A      | F, B               | D, C               |
| B      | A, C               | E, F               |
| C      | B, D               | A, E               |
| D      | C, E               | F, A               |
| E      | D, F               | C, B               |
| F      | E, A               | B, D               |

b) Alle weiteren Möglichkeiten (bis auf Drehung und Spiegelung) zeigt Abbildung L 300622.

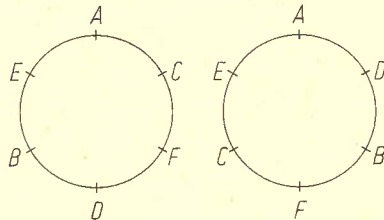


Abb. L 300622

300623) Lösung:11 Punkte

Die Lettern reichen nicht aus. Zu einer Begründung kommt man, wenn man für die Lettern mit der Ziffer 6 die benötigte Stückzahl ermittelt (dies ist zweckmäßig, da für die 6 die kleinste verfügbare Stückzahl vorliegt):

An der Einerstelle wird die Ziffer 6 jeweils einmal für die Zahlen

1 bis 10, 11 bis 20, ..., 1011 bis 1020  
gebraucht, d. h. 102mal.

An der Zehnerstelle wird die Ziffer 6 jeweils 10mal für die Zahlen

60 bis 69, 160 bis 169, ..., 960 bis 969  
gebraucht, d. h. 100mal.

L 6

An der Hunderterstelle wird die Ziffer 6 für die Zahlen

600, ..., 699

gebraucht, d. h. 100mal.

Es werden also 302 Lettern mit der Ziffer 6 gebraucht, während nur 300 zur Verfügung stehen.

300624) Lösung:

11 Punkte

Die folgende Tabelle zeigt alle Werte  $n = 5a + 7b$  mit  $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  und  $b = 0, 1, 2, 3, 4$

| a \ b | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| 0     | 0  | 5  | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 1     | 7  | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 |
| 2     | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 |
| 3     | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 |
| 4     | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | 53 |

Abb. L 300624

Da bei weiterem Vergrößern von  $a$  oder  $b$  (oder beiden) stets jeweils auch  $n$  größer wird, ergibt sich:

(1) Unter allen natürlichen Zahlen  $n \leq 24$  lassen sich genau die Zahlen

0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24  
in der genannten Form darstellen.

Ferner ist aus der Tabelle ersichtlich:

(2) Die Zahlen

24, 25, 26, 27, 28

lassen sich in der genannten Form darstellen.

Indem man nun zu den in (2) genannten Zahlen der Reihe nach  $1 \cdot 5, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, \dots$  usw. addiert, erhält man:

(3) Auch die Zahlen

29, 30, 31, 32, 33,  
34, 35, 36, 37, 38,  
39, 40, 41, 42, 43,  
.....

lassen sich in der genannten Form darstellen.

L 6

Mit (2) und (3) ist gezeigt, daß jede natürliche Zahl  $n \geq 24$  sich in dieser Form darstellen läßt. Die insgesamt gesuchten Zahlen sind also genau die in (1) genannten Zahlen und alle natürlichen Zahlen  $n > 24$ .

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 6

Gesamtpunktzahl: 40

300621

|                                                         |          |
|---------------------------------------------------------|----------|
| a) Zeichnung: Zwei Quadrate im Koordinatensystem        | 4        |
| b) Zeichnung: Spiegelgerade                             | 2        |
| c) Koordinaten des Drehzentrums, Drehwinkel $180^\circ$ | <u>3</u> |
|                                                         | 9        |

300622

|                                                   |          |
|---------------------------------------------------|----------|
| a) Tabelle                                        | 4        |
| b) Zwei weitere Sitzordnungen der geforderten Art | <u>5</u> |
|                                                   | 9        |

300623

|                                                                                                                      |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Darstellung des Ermittlungsweges der Anzahl von Ziffern 6<br>(z. B. gegliedert in Einer-, Zehner-, Hunderterstellen) | 4        |
| Rechnerisch richtige Ermittlung dieser Anzahl                                                                        | 5        |
| Folgerung: Die Anzahl reicht nicht aus                                                                               | <u>2</u> |
|                                                                                                                      | 11       |

300624

|                                                                       |          |
|-----------------------------------------------------------------------|----------|
| Ermittlung von Anfangswerten (z. B. Werte unter 24)                   | 5        |
| Gewinnung der Aussage, daß ab 24 alle natürlichen Zahlen dazugehören: |          |
| Als Anfangswerte hierfür ausreichende Werte<br>(z. B. 24, ..., 28)    | 2        |
| Weiteres Beweisvorgehen (z. B. in Fünferschritten)                    | <u>6</u> |
|                                                                       | 11       |