

XXX. Olympiade Junger Mathematiker  
der Deutschen Demokratischen Republik  
2. Stufe (Kreisolympiade)  
Olympiadeklasse 7

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

300721

Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

- (1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
- (2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
- (3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.

Gib eine a) möglichst kleine,  
b) möglichst große

Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

300722

a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen  $a$ , die größer als 100 und kleiner als 1000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

- (1)  $a$  hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
- (2)  $a$  läßt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
- (3)  $a$  ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung wegläßt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

A 7

300723

- a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleichgroße Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, daß mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind. Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!
- b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden. Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, daß der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von  $27 \text{ dm}^3$  hatte!

300724

In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel  $\sphericalangle ABC$  bzw.  $\sphericalangle ACB$ , und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

- a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, daß der Innenwinkel  $\sphericalangle BAC$  die Größe  $\alpha = 60^\circ$  hat, so folgt, daß dann auch stets der Winkel  $\sphericalangle BSE$  die Größe  $60^\circ$  hat!
- b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe  $\alpha$  des Innenwinkels  $\sphericalangle BAC$  die Größe des Winkels  $\sphericalangle BSE$  ergibt!

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR  
 2. Stufe (Kreisolympiade)  
Lösungen und Punktbewertung  
 Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die  
 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

300721) Lösung:9 Punkte

- a) Um eine möglichst kleine Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, daß auf möglichst viele Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen. Das bedeutet: Genau 8 Schüler gehören sowohl einer Arbeitsgemeinschaft als auch einer Sportgemeinschaft an. Dann folgt: Genau 2 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft an. Zusammen mit den in (3) genannten 5 Schülern ergibt das  $8 + 2 + 5 = 15$  Schüler.
- b) Um eine möglichst große Anzahl zu erhalten, wählt man die Möglichkeit, daß auf (möglichst wenige, also) keinen der Schüler zwei der drei Aussagen zutreffen. Das ergibt mit den in (1), (2) und (3) genannten Schülern insgesamt  $10 + 8 + 5 = 23$  Schüler.

2. Lösungsweg: Bezeichnet

X die Schülerzahl der Klasse,

A die Anzahl der Schüler, die einer Arbeitsgemeinschaft, aber nicht einer Sportgemeinschaft angehören,

S die Anzahl der Schüler, die einer Sportgemeinschaft, aber nicht einer Arbeitsgemeinschaft angehören,

B die Anzahl der Schüler, die beiden angehören,

so sind (1), (2), (3) äquivalent mit

$$B + A = 10, \quad (4)$$

$$B + S = 8, \quad (5)$$

$$B + A + S + 5 = X. \quad (6)$$

Aus (6) und (4) folgt  $10 + S + 5 = X$ ; wegen  $S \geq 0$  folgt  $X \geq 10 + 0 + 5 = 15$ .

Da (4), (5), (6) durch  $B = 8, A = 2, S = 0$  mit  $X = 15$  erfüllt werden, ist  $X = 15$  der in a) gesuchte kleinstmögliche Wert X.

L 7

Aus (6) und (5) folgt  $8 + A + 5 = X$ ; wegen  $B \geq 0$  und (4) folgt  $A \leq 10$  und damit  $X \leq 8 + 10 + 5 = 23$ . Da (4), (5), (6) durch  $B = 0$ ,  $A = 10$ ,  $S = 8$  mit  $X = 23$  erfüllt werden, ist  $X = 23$  der in b) gesuchte größtmögliche Wert  $X$ .

300722) Lösung:

11 Punkte

a) Für jede natürliche Zahl  $a$ , die die erste Teilaussage in (2) erfüllt, ist  $a - 2$  ein Vielfaches von 11, also eine der Zahlen

$$0, 11, 2 \cdot 11, 3 \cdot 11, \dots$$

Erfüllt  $a$  auch die zweite Teilaussage in (2), so ist  $a - 2$  auch ein Vielfaches von 13, also verbleiben für  $a - 2$ \* nur die Zahlen

$$0, 13 \cdot 11, 2 \cdot 13 \cdot 11, 3 \cdot 13 \cdot 11, \dots$$

Erfüllt  $a$  auch (3), so ist  $a - 2$  eine ungerade Zahl, also verbleiben für  $a - 2$  nur die Zahlen

$$143, 3 \cdot 143 = 429, 5 \cdot 143 = 715, 7 \cdot 143 = 1001, \dots$$

Von den natürlichen Zahlen  $a$  mit  $100 < a < 1000$  erfüllen also nur die Zahlen

$$143 + 2 = 145, 429 + 2 = 431, 715 + 2 = 717$$

die Bedingungen (2) und (3).

Wegen  $145 = 5 \cdot 29$  hat 145 mehr als zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler, nämlich 1, 5, 29, 145. Entsprechendes gilt wegen  $717 = 3 \cdot 239$  auch für 717. Dagegen ist 431 eine Primzahl. (Dies folgt daraus, daß 431 durch keine der Primzahlen teilbar ist, deren Quadrat kleiner oder gleich 431 ist, nämlich 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.) Also hat 431 genau die zwei natürlichen Zahlen 1 und 431 als Teiler.

Somit werden unter den natürlichen Zahlen  $a$  mit  $100 < a < 1000$  die Bedingungen (1), (2), (3) genau von der Zahl  $a = 431$  erfüllt.

b) Wie eben gezeigt, werden (2) und (3) außer von 431 beispielsweise auch von 145 erfüllt. Ferner werden (1) und (3) beispielsweise auch von der ungeraden Primzahl 101 erfüllt. Läßt

\* Hier kann als bekannter Sachverhalt verwendet werden: Ist  $a - 2$  durch 11 und durch 13 teilbar, so auch durch das kleinste gemeinsame Vielfache von 11 und 13, also durch  $11 \cdot 13$ .

L 7

man also eine der Bedingungen (1) oder (2) weg, so ändert sich das Ergebnis von a).

Dagegen kann man (3) weglassen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern; denn jede natürliche Zahl, die (1) erfüllt, ist eine Primzahl, und wenn sie größer als 100 ist, scheidet die einzige gerade Primzahl 2 aus, d. h.: Für Zahlen  $a$ , die größer als 100 (und kleiner als 1000) sind, folgt (3) bereits aus (1).

300723) Lösung:

11 Punkte

- a) Einen Würfel kann man in gleichgroße Teilwürfel zerlegen, indem man eine natürliche Zahl  $n > 1$  wählt, drei von einer Ecke ausgehende Kanten in je  $n$  gleiche Teile teilt und durch die Teilpunkte Ebenen legt, die zu den Begrenzungsflächen des Würfels parallel verlaufen. Der Würfel wird dadurch in  $n$  Schichten zerlegt, jede Schicht in  $n \cdot n$  Teilwürfel. Die Anzahl  $A$  der entstehenden Teilwürfel beträgt also  $A = n^3$  (siehe die folgende Tabelle).

n	2	3	4	5	6	...
A	8	27	64	125	216	...

Die völlig ungefärbten Teilwürfel bilden einen im Innern des gesamten Holzwürfels enthaltenen kleineren Würfel. Damit die Anzahl seiner Teilwürfel  $A = 40$  ist, muß für ihn  $n \geq 4$  sein, wie die Tabelle zeigt. Für den gesamten Holzwürfel ist dieses  $n$  durch  $n + 2$  zu ersetzen. Die kleinstmögliche Anzahl von Teilwürfeln, mit der die gestellte Forderung erfüllt wird, ist also die zu  $n = 6$  gehörende Anzahl  $A = 216$ .

- b) Wegen  $3^3 = 27$  beträgt die Kantenlänge des ursprünglichen Holzwürfels 3 dm. Aus a) folgt nun, daß die Kantenlänge eines der 216 Teilwürfel  $3 \text{ dm} : 6 = 0,5 \text{ dm}$  beträgt. Der Quader besteht aus 40 Würfeln dieser Kantenlänge. Sein Volumen beträgt (unabhängig davon, wie dieser Quader aus den Würfeln zusammengesetzt wurde) daher  $40 \cdot (0,5 \text{ dm})^3 = 5 \text{ dm}^3$ .

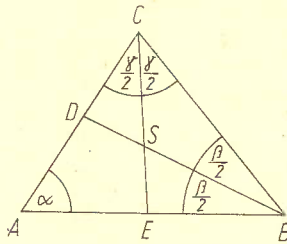


Abb. L 300724

a) Für  $\beta = \sphericalangle ABC$ ,  $\gamma = \sphericalangle ACB$  gilt nach Voraussetzung

$$\sphericalangle CBS = \sphericalangle CBD = \frac{\beta}{2},$$

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle BCE = \frac{\gamma}{2}.$$

Nach dem Außenwinkelsatz für  $\triangle BCS$  folgt hieraus

$$\sphericalangle BSE = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Nach dem Innenwinkelsatz für  $\triangle ABC$  ist

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = 120^\circ;$$

damit ergibt sich

$$\sphericalangle BSE = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ,$$

w.z.b.w.

b) Diese Herleitung bleibt bis einschließlich zur Formel  $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$  für beliebig vorgegebenes  $\alpha$  gültig; damit erhält man als gesuchte Formel

$$\begin{aligned} \sphericalangle BSE &= \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) \\ &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

L 7

Empfehlung für die Punktverteilung

OKL 7            Gesamtpunktzahl: 40

300721

- |   |          |
|---|----------|
| a) Ermittlung einer minimalen Schülerzahl | 5        |
| b) Ermittlung einer maximalen Schülerzahl | 4        |
|   | <u>9</u> |

300722

- |  |           |
|--|-----------|
| a) Berücksichtigung von (2): Zahlen der Form $a = n \cdot 143$ | 3         |
| Weitere Ermittlungsschritte bis $a = 431$                      | 3         |
| b) Nachweis, daß Wegfall von (1) Ergebnisänderung bewirkt      | 2         |
| Nachweis, daß Wegfall von (2) Ergebnisänderung bewirkt         | 1         |
| Nachweis, daß Wegfall von (3) keine Ergebnisänderung bewirkt   |           |
|  | <u>2</u>  |
|  | <u>11</u> |

300723

- |  |           |
|--|-----------|
| a) Berücksichtigung der Notwendigkeit, die kleinste dritte Potenz über 40 zu suchen                                  | 4         |
| Abschließende Herleitung der Anzahl durch Erhöhung der zuvor gefundenen Anzahl 4 um 2 und Auffinden des Wertes $6^3$ | 3         |
| b) Berechnung des 40fachen Teilwürfelvolumens  | 4         |
|  | <u>11</u> |

300724

- |  |          |
|--|----------|
| a) Berücksichtigung der Voraussetzung, daß BS, CS Winkelhalbierende sind | 3        |
| Abschließende Herleitung von $\overline{\neq} BSE = 60^\circ$            | 4        |
| b) Herleitung einer allgemeinen Formel                                   | 2        |
|  | <u>9</u> |

Falls sogleich allgemein b) gelöst und a) dann durch Spezialisierung gewonnen wird, sind Punkte entsprechend umzuverteilen.