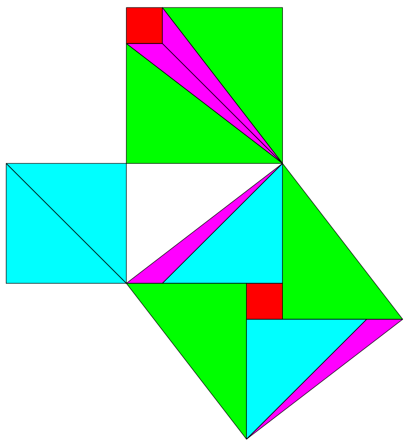
1. - 34. Olympiade - Klasse 7

Aufgaben



Gewidmet meinen Kindern Cosima, Elias und Adrian

Vorwort

Im vorliegenden Band befinden sich Texte vergangener Mathematikolympiaden, die ich vor einigen Jahren zum Üben gern selbst besessen hätte. Als Schüler träumte ich von einer kompletten Sammlung aller Aufgaben und Lösungen, allerdings wurde dieser Traum erst viele Jahre später wahr. Zu DDR-Zeiten war es äußerst schwer, an diese Dokumente zu gelangen, aber selbst jetzt gibt es nur wenig öffentlich zugängiges Material aus jener Zeit.

Die einst von der Aufgabenkommission erfundenen Texte wurden mir größtenteils von Herrn Umlauft zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm sehr danke. Ebenso möchte ich aber auch stellvertretend für all die Menschen, die zur Erweiterung meiner Sammlung beigetragen und mich bei meinem Unterfangen begleitet haben, folgende Namen nennen: O. Döhring, H. Thielemann, H. Winkelvoss, E. Specht, E. Keller, G. Thiel, B. Mulansky, H. Ocholt, M. Worel, R. Labahn, S. Ryl, H.-G. Gräbe.

Ein herzlicher Dank gilt meiner Familie, ganz besonders natürlich meinem Mann, der mir stets mit viel Verständnis für meine zeitraubenden Interessen zur Seite steht. Außerdem möchte ich meinen Eltern und Schwiegereltern danken, die sich immer wieder gern um die Kinder kümmern und mir damit kleine Freiräume verschaffen.

Copyright

Hinweise

Die Numerierung der Aufgaben erfolgt nach dem Schema: $jjkksa$, wobei jj der Aufgabenjahrgang, kk die Klassenstufe, s die Olympiadestufe und a die Aufgabennummer darstellt. Bei Wahlaufgaben folgt der Aufgabennummer noch ein A oder B.

Die Texte entsprechen den Originaltexten der jeweiligen Olympiaden - es wurden daher weder auf die neue deutsche Rechtschreibung Rücksicht genommen noch ideologische Phrasen umformuliert.

Dresden, 31. März 2014 *Manuela Kugel*

1. Mathematik-Olympiade 1961/62
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010711:

a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$, b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$, d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^4$.

Ordne die Ergebnisse der Größe nach!

Aufgabe 010712:

Beim freiwilligen Kartoffeleinsatz trugen drei Gruppen von Schülern einer 7. Klasse einen kleinen Wettbewerb aus. Sie sammelten gemeinsam insgesamt 52 dt Kartoffeln. Dabei sammelte die zweite Gruppe $1\frac{1}{2}$mal soviel wie die erste, die dritte 3 dt Kartoffeln mehr als die erste.

Wieviel Dezitonnen Kartoffeln sammelte jede Gruppe?

Aufgabe 010713:

Im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion sägt ein Schüler ein Stück Vierkantstahl ab, das 475 p schwer ist. Am nächsten Tag wird ein Stück Vierkantstahl, dessen Abmessungen viermal so groß sind wie bei dem abgesägten Stück und das aus gleichem Material besteht, bearbeitet.

Wie schwer ist das Stück? Begründe die Antwort!

Aufgabe 010714:

Im vorigen Schuljahr meldete die „Berliner Zeitung“ folgende Ergebnisse des Berliner Schülerfußballturniers nach dem 2. Spieltag:

Ergebnisse:

12. Oberschule Treptow – Max-Kreuziger-Oberschule	1:0
4. Oberschule Köpenick – 8. Oberschule Lichtenberg	2:0

Tabellenstand:

Platz	Mannschaft	Punkte	Tore
1.	4. Oberschule Köpenick	2:2	2:1
2.	12. Oberschule Treptow	2:2	2:2
3.	Max-Kreuziger-Oberschule	2:2	1:1
4.	8. Oberschule Lichtenberg	2:2	2:3

Welche Ergebnisse gab es am ersten Spieltag?

Anmerkung: Für jeden Sieg gibt es 2 : 0 Punkte, für jedes unentschiedene Spiel 1 : 1 Punkte, für jede Niederlage 0 : 2 Punkte.

Aufgabe 010715:

Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:

a) zwei benachbarte Seiten,

b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,

c) beide Diagonalen,

d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,

e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?

Durch wieviel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne 3 Beispiele!

Aufgabe 010716:

Konstruiere ein beliebiges Quadrat! Konstruiere dann

a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,

b) ein Quadrat mit der halben Fläche

des Ausgangsquadrates! Begründe die Konstruktion!

1. Mathematik-Olympiade 1961/62
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010721:

Der Kapitalismus hat zur Folge, daß einer Handvoll industriell hochentwickelter Länder eine große Anzahl sehr schwach entwickelter Länder gegenüberstehen, die durch die imperialistischen Mächte ausgebeutet und ausgeplündert werden.

So erzeugten die hoch entwickelten Länder bei einer Bevölkerungszahl von 603 000 000 Menschen im Jahre 1959 insgesamt 204 000 000 t Stahl und 1 604 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.

Die schwach entwickelten Länder erzeugten im gleichen Jahr bei einer Bevölkerungszahl von 1 283 000 000 Menschen nur 6 000 000 t Stahl und 120 Milliarden Kilowattstunden Elektroenergie.

Wieviel Stahl und wieviel Kilowattstunden hätten die schwach entwickelten Länder erzeugen müssen, wenn sie im Verhältnis zu ihrer Bevölkerungszahl genau so viel produziert hätten wie die imperialistischen Mächte?

Aufgabe 010722:

Die Eisenbahnstrecke Leipzig - Halle - Köthen - Magdeburg ist $123,6$ km lang. Ein Personenzug fährt um 12.32 Uhr in Leipzig ab. Er hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $32,7\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein D-Zug fährt um 13.11 Uhr in Leipzig ab. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $75,2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Um wieviel Uhr holt der D-Zug den Personenzug ein?

b) Wieviel Kilometer haben beide Züge bis dahin zurückgelegt?

Aufgabe 010723:

Es ist zu beweisen, daß in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.

Aufgabe 010724:

In einer Ebene sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf g liegen.

Konstruiere alle Punkte P, die von g jeweils 3 cm Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!

Aufgabe 010725:

Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm und $a_3 = 4$ cm der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zuunterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.

Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?

1. Mathematik-Olympiade 1961/62
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010731:

Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.

Um wieviel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität

a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine,

b) beim Einsatz eines Melkstandes?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

Aufgabe 010732:

Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen - Storkow - Golßen - Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück. Auf einer Karte im Maßstab 1 : 750 000 stellen wir die folgenden Strecken fest:

Zossen–Storkow	$4,5$ cm,
Storkow–Golßen	$5,2$ cm,
Golßen–Zossen	$3,9$ cm.

Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?

b) Um wieviel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

Aufgabe 010733:

In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben. Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen! Wieviel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?

Aufgabe 010734:

Es ist zu beweisen, daß die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende ist.

Aufgabe 010735:

Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.

a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!

b) Läßt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

2. Mathematik-Olympiade 1962/63
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020711:

In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen:

Länge $l = 29,5$ cm,
Breite $b = 12,0$ cm.

a) Berechne die Fläche einer Fliese!

b) Wieviel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge?

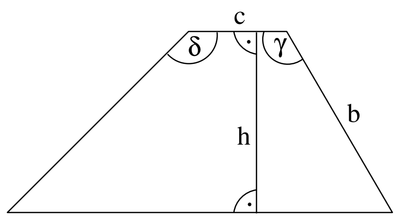
Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.

Aufgabe 020712:

Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße, die auf der Abbildung sichtbare Fläche zu berechnen.

Wie groß ist die Fläche?

$$\begin{aligned} b &= 60\,\text{mm} \\ c &= 34\,\text{mm} \\ h &= 52\,\text{mm} \\ \gamma &= 120^\circ \\ \delta &= 135^\circ \end{aligned}$$

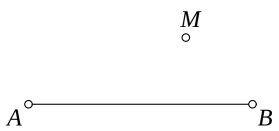


Aufgabe 020713:

Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist.

Aufgabe 020714:

Gegeben ist eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.



a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!

b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist! Beschreibe die Konstruktionen und begründe sie!

Aufgabe 020715:

Die Summe von 9 aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen beträgt 396. Wie lauten die Zahlen?

Aufgabe 020716:

In einem Haus mit 28 Fenstern sollen einige fehlende Fensterläden beschafft werden, so daß an jedem Fenster 2 Läden vorhanden sind. Einige Fenster haben noch 2 Läden, bei der gleichen Anzahl von Fenstern fehlen beide, der Rest hat je einen Laden.

Wieviel neue Fensterläden braucht man? Begründe die Antwort!

2. Mathematik-Olympiade 1962/63
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020721:
An der Berliner Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 nahmen im Stadtbezirk Köpenick 3 808 von 5 828 Schülern und im Stadtbezirk Lichtenberg 5 097 von 7 387 Schülern teil. Welcher Stadtbezirk wies die bessere relative Beteiligung auf? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 020722:
Bei einem Preisschießen der GST gaben Günther und Heidrun je 5 Schuß ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:

Einmal die 3,	zweimal die 5,	zweimal die 6,	zweimal die 7,
einmal die 8,	einmal die 9,	einmal die 10.	

Günther erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß. Heidrun dagegen erreichte mit ihren ersten vier Schüssen fünfmal so viele Ringe wie mit ihrem letzten Schuß; ihre beiden ersten Schüsse ergaben zusammen genau so viele Ringe wie ihre beiden letzten zusammen. Günther schoß die 9.

a) Wer gewann den Wettkampf?

b) Wer schoß die 10?

Die Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 020723:
Emil erzählt: „Mein Bruder Heinz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 85 Jahre alt.“

Wie alt ist Emil?

Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

Aufgabe 020724:
Wieviel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben?

Begründe deine Antwort!

Aufgabe 020725:
Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!

Beschreibe die Konstruktion!

2. Mathematik-Olympiade 1962/63
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020731:

Bei einem Preisausschreiben galt es, die Bilder von 4 verschiedenen Bauwerken 4 genannten Städten richtig zuzuordnen. 12 Prozent der Einsender hatten alles richtig gemacht, doppelt so viele hatten zwei Bauwerke und viermal so viele hatten ein Bauwerk richtig zugeordnet. 240 eingesandte Lösungen waren gänzlich falsch.

a) Wieviel Lösungen waren eingesandt worden?

b) Wieviel Einsender hatten 0, 1, 2, 3 und 4 Paare richtig zusammengestellt?

Aufgabe 020732:

In einen Flachstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser $d = 20$ mm gebohrt werden.

In welchem Abstand muß angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand bis zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

Aufgabe 020733:

Hans hat eine Eins geschrieben und ist in bester Stimmung. Als er heimkommt, läuft er daher frohgemut die 20 Stufen bis zu seiner Wohnung im 1. Stock so hinauf, daß er immer 3 Stufen hinauf- und 2 wieder hinuntersteigt, ohne eine Stufe auszulassen. Klaus, der im gleichen Haus im 4. Stock wohnt, meint: „Wenn du so weitergehst, bin ich eher vor meiner Tür als du vor deiner.“ Sie vereinbaren, daß sie beide im gleichen Rhythmus steigen, und daß der gewinnt, der zuerst auf dem Treppenabsatz vor seiner Wohnung steht. (Bis zum 4. Stock sind es 4 mal 20 Stufen.)

a) Wer gewinnt?

b) Wer würde gewinnen, wenn es bis zum 1. Stock nur 10 Stufen wären und die 3 anderen Treppen aber je 20 Stufen haben?

c) Wieviel Stufen müßte die unterste Treppe haben, damit beide Jungen gleichzeitig ankommen? (Auch hier sollen die 3 übrigen Treppen 20 Stufen haben.)

Begründe deine Antworten!

Aufgabe 020734:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2.

Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

Aufgabe 020735:

Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M. Beweise, daß der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

Aufgabe 020736:

Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $\overline{BC} = a$ und $\overline{AC} = b$), die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7\,\text{cm}$, $h_a = 4\,\text{cm}$, $\gamma = 100°$.

3. Mathematik-Olympiade 1963/64
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030711:

Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm. Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d.h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln.

Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

Aufgabe 030712:

Bei der Friedensfahrt 1963 wurde zwischen Bautzen und Dresden (57 km) ein Einzelzeitfahren ausgetragen. Die Fahrer starteten dabei in Abständen von 1 Minute. Unmittelbar vor dem späteren Gesamtsieger Klaus Ampler (DDR) startete sein härtester Gegner Vyncke (Belgien). Während Ampler je Stunde durchschnittlich 42 km zurücklegte, erreichte Vyncke einen „Schnitt“ von 40 km je Stunde.

In welcher Zeit und nach wieviel Kilometern hätte Ampler den belgischen Fahrer eingeholt, wenn beide mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wären? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 030713:

Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl

$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$

größer oder kleiner als 1 ist?

Aufgabe 030714:

Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.

a) Beweise, daß die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!

b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

Aufgabe 030715:

Mit wieviel Nullen endet das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 40? (Begründung!)

Aufgabe 030716:

a) Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die bei der Division durch 2, 3, 4, 5, und 6 jeweils den Rest 1 läßt, aber durch 7 teilbar ist.

b) Nenne zwei weitere Zahlen mit dieser Eigenschaft und gib an, wie man beliebig viele solche Zahlen bekommen kann!

3. Mathematik-Olympiade 1963/64
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030721:
Durch welche höchste Potenz von 2 ist das Produkt von vier aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen mindestens teilbar?

Aufgabe 030722:
Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!

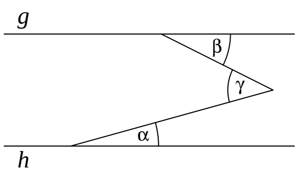
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 030723:
Ein Holzwürfel mit einer Kantenlänge von 30 cm soll in Würfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden.

a) Wieviel Schnitte muß man dabei ausführen? (Das Sägen im Paket soll nicht gestattet sein.)

b) Wieviel Würfel erhält man?

Aufgabe 030724:



Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.

Wie groß ist der Winkel γ? Beweise deine Behauptung!

Aufgabe 030725:
In einem Kasten befinden sich 70 Kugeln, nämlich 20 rote, 20 grüne, 20 gelbe, und der Rest ist schwarz oder weiß. Brigitte soll im Dunkeln aus diesem Kasten so viele Kugeln herausnehmen, daß unter ihnen mit Sicherheit mindestens 10 Kugeln die gleiche Farbe haben.

Wieviel Kugeln muß sie mindestens herausnehmen? Begründe deine Antwort!

3. Mathematik-Olympiade 1963/64
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030731:

Peter stellt um 7.00 Uhr seine Armbanduhr nach der Zeitansage im Radio. Um 15.00 Uhr stellt er fest, daß seine Uhr in diesen 8 Stunden insgesamt 12 Minuten nachgegangen ist. Er möchte um Punkt 18.00 Uhr seinen Freund treffen.

Wie muß er seine Uhr um 15.00 Uhr stellen, damit sie um 18.00 Uhr die genaue Zeit anzeigt?

Aufgabe 030732:

a) Nenne alle Primfaktoren der Zahl 111 111!

b) Gib noch 10 weitere Teiler dieser Zahl an!

Aufgabe 030733:

Eine Zahl 30∗0∗03 soll durch 13 teilbar sein. Dabei sind die ∗ jeweils durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. (Für beide Sterne muß nicht unbedingt die gleiche Ziffer gesetzt werden.)

Gib sämtliche Zahlen an, die die geforderte Eigenschaft haben!

Aufgabe 030734:

Zeichne ein beliebiges konvexes Fünfeck und seine sämtlichen Diagonalen!

Wieviel konvexe Vierecke sind in der Figur enthalten? Gib genau an, wie du diese Anzahl ermittelt hast!

Aufgabe 030735:

Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, daß sie die Gerade schneiden!

Beweise, daß die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

Aufgabe 030736:

Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere dieses Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

4. Mathematik-Olympiade 1964/65
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040711:

Nur unter Verwendung der Ziffer 7 sollen Zahlen gebildet werden, die miteinander verknüpft die Zahl 1964 ergeben. Folgende Arten der Verknüpfung dürfen dabei auftreten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind nicht zu verwenden.

Gib eine der möglichen Lösungen an!

Aufgabe 040712:

Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere $92,7$ km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er drei Stunden und 12 Minuten.

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt! Runde auf eine Dezimale!

Aufgabe 040713:

Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände gegebenen Winkel von $80°$ auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung. Brigitte findet zwei Lösungswege.

Aufgabe 040714:

Jede natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat zum Beispiel die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist - wie man sieht - keine vollkommene Zahl.

Welche *vollkommenen Zahlen* gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

Aufgabe 040715:

In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$. Es ist zu beweisen, daß die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$ aufeinander senkrecht stehen.

Aufgabe 040716:

Gegeben ist ein quaderförmiger Holzklotz mit den Kanten von der Länge $a = 8$ cm, $b = 8$ cm und $c = 27$ cm. Durch möglichst wenig ebene Schnitte mit einer Säge sind Teilkörper herzustellen, so daß sich diese zu einem Würfel zusammensetzen lassen.

Fertige eine Skizze des Quaders an, aus der der Verlauf der Schnitte ersichtlich ist, und eine Skizze des Würfels, die die Lage der Teilkörper zeigt!

4. Mathematik-Olympiade 1964/65
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040721:

Beweise, daß die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, durch 21 teilbar ist!

Aufgabe 040722:

In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur "5", jeder neunte Schüler erhielt die Zensur "1", jeder dritte die Zensur "2" und jeder sechste die Zensur "4".

Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$.

Wieviel Schüler erhielten die Zensur "3"?

Aufgabe 040723:

In einem Dreieck seien die Maßzahlen der Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.

Berechne den Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 040724:

Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden die gleichseitigen Dreiecke ABE, BCF, CDG und ADH so errichtet, daß die Dreiecksflächen außerhalb des Parallelogramms liegen.

Es ist zu beweisen, daß E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

4. Mathematik-Olympiade 1964/65
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040731:

Wieviel Seiten eines Buches werden von Seite 1 an fortlaufend numeriert, wenn dabei insgesamt 1260 Ziffern gedruckt werden?

Aufgabe 040732:

Zeichne ein nicht gleichseitiges Parallelogramm, und beweise, daß die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechteckes sind!

Aufgabe 040733:

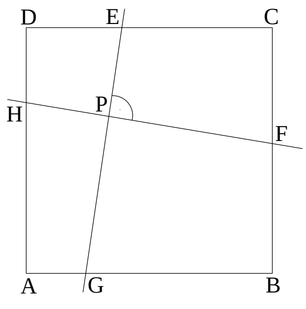
Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meterlauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:

1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.

In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch.

Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

Aufgabe 040734:



Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, daß jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (vgl. Abb.).

Beweise, daß die beiden Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ gleich lang sind!

Aufgabe 040735:

Ein Zirkel Junger Mathematiker beschäftigt sich damit, Aufgaben für die Knobelecke zusammenzustellen. Folgende Aufgabe wurde vorgeschlagen:

$$\begin{array}{cccccc} & D & R & E & I \\ + & E & I & N & S \\ \hline & V & I & E & R \end{array}$$

Die Buchstaben sollen durch Ziffern ersetzt werden. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Es stellt sich aber heraus, daß es keine Lösung dieser Aufgabe geben kann. Begründe das!

Aufgabe 040736:

Gegeben ist das Dreieck ABC. Es soll ein Rhombus so konstruiert werden, daß einer seiner Eckpunkte mit A zusammenfällt und die drei übrigen Eckpunkte jeweils auf einer Dreiecksseite liegen.

5. Mathematik-Olympiade 1965/66
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050711:

Zwei Jungen vergleichen ihre Ersparnisse. Sie stellen fest: $\frac{2}{3}$ von Peters Sparbetrag ist genausoviel wie $\frac{3}{4}$ von Rainers Sparbetrag. Wer hat mehr Geld gespart?

Aufgabe 050712:

Innerhalb eines Quadrats liegt ein konvexes Fünfeck. Es ist zu beweisen, daß der Umfang eines derartigen Fünfecks stets kleiner ist als der Umfang des Quadrats.

Aufgabe 050713:

Der Fahrer eines in der DDR zugelassenen Pkw beging nach einem Verkehrsunfall Fahrerflucht. Nach der Befragung einiger Zeugen erfuhr man über das polizeiliche Kennzeichen des Pkw folgendes:

a) Die beiden Buchstaben des Kennzeichens lauteten AB oder AD.

b) Die beiden vorderen Ziffern waren gleich und außerdem anders als die beiden letzten Ziffern.

c) Die aus den beiden letzten Ziffern gebildete Zahl war 69 oder 96.

Welches ist die größtmögliche Anzahl von Pkw, die diesen Bedingungen genügen können?

Aufgabe 050714:

Rolf stellt seinem Freund folgende Aufgabe:

Auf einem Schachturnier spielte jeder genau einmal gegen jeden. Insgesamt wurden 28 Partien gespielt.

Wieviel Teilnehmer gab es bei diesem Turnier?

5. Mathematik-Olympiade 1965/66
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050721:

Bei den Nahverkehrsbetrieben Rostock kann man Straßenbahnfahrscheine für Erwachsene zu folgenden Preisen kaufen:

(1) Einen Fahrschein an der Zahlbox für 0,20 MDN

(2) Eine Karte mit 6 Fahrabschnitten für 1,00 MDN

(3) Einen Block mit 50 Fahrscheinen für 7,50 MDN
(Die Gültigkeitsdauer ist unbegrenzt)

(4) Eine Monatskarte für beliebig viele Fahrten für 10,00 MDN

Welches ist die kleinste Anzahl von Fahrten (monatlich), bei der für eine Person die Monatskarte am billigsten ist?

Aufgabe 050722:

Untersuche, ob in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen können!

Aufgabe 050723:

Vergleiche die Summe aller dreistelligen durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Summe aller dreistelligen nicht durch 4 teilbaren geraden natürlichen Zahlen!

a) Welche der beiden Summen ist größer?

b) Wie groß ist die Differenz der beiden Summen dem Betrage nach?

Aufgabe 050724:

In einen Kreis vom Radius r sind zwei Sehnen mit einem gemeinsamen Endpunkt so eingezeichnet, daß sie einen Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 30°$ bilden.

Wie groß ist die Entfernung der beiden anderen Sehnenendpunkte voneinander?

5. Mathematik-Olympiade 1965/66
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050731:

Auf welche Ziffern endet das Produkt

$$z = 345\,926\,476^3 \cdot 125\,399\,676^2 \cdot 2\,100\,933\,776^3?$$

Aufgabe 050732:

Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte A und B.

a) Konstruiere unter alleiniger Verwendung des Zirkels einen Punkt P, der auf der gleichen Geraden wie A und B liegt!

b) Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren läßt.

Aufgabe 050733:

Der Punkt M liege im Innern des Dreiecks ΔABC.

Beweise, daß für jeden solchen Punkt M $\epsilon > \alpha$ gilt, wenn ϵ $(< 180°)$ das Maß des Winkels $\sphericalangle BMC$ und α das Maß des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist!

Aufgabe 050734:

Berechne die Anzahl aller (untereinander verschiedener) vierstelligen Zahlen, die sich unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 3 und 8 schreiben lassen! Dabei braucht nicht jede der Zahlen sämtliche der drei zugelassenen Ziffern zu enthalten.

Aufgabe 050735:

In dem Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel DC$. Ferner gelte $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$. Beweise, daß die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert!

Aufgabe 050736:

Ein Betrieb sollte in 20 Arbeitstagen p Werkstücke der gleichen Art herstellen. Durch Anwendung besserer Arbeitsmethoden gelang es den Arbeitern, diesen Auftrag bereits in 5 Arbeitstagen früher zu erfüllen und dabei noch k Werkstücke mehr als gefordert herzustellen.

Wieviel Werkstücke wurden durchschnittlich an jedem Arbeitstag über den Plan hinaus produziert?

6. Mathematik-Olympiade 1966/67
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060711:

Ein Vater geht mit seinem Sohn spazieren. Dabei stellen sie fest: Jede Strecke, die der Sohn mit drei Schritten zurücklegt, schafft der Vater mit zwei Schritten.

Nach wieviel Schritten des Vaters setzen beide gleichzeitig den rechten Fuß auf, wenn beide den ersten Schritt gleichzeitig beginnen und mit dem rechten Bein ausführen?

Aufgabe 060712:

In dem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit dem rechten Winkel bei C sei S der Schnittpunkt der beiden Halbierenden der spitzen Winkel.

Ermittle das Gradmaß δ des Winkels $\sphericalangle ASB$, den diese Winkelhalbierenden miteinander bilden!

Aufgabe 060713:

In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und 5 Lei.

Beweise: Jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, kann unter alleiniger Verwendung von 3- und 5-Lei- Scheinen zusammengestellt werden, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind!

Aufgabe 060714:

Zwischen den Schenkeln s_1 und s_2 eines spitzen Winkels liegt der Punkt P. Der Scheitelpunkt des Winkels sei S.

Man konstruiere auf s_1 und s_2 die Punkte X, für die die Länge der Strecke XS gleich der Länge der Strecke XP ist, für die also $\overline{XS} = \overline{XP}$ gilt.

6. Mathematik-Olympiade 1966/67
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060721:

Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!

Aufgabe 060722:

In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck $ABCD$ so eingezeichnet, daß alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).

Beweise, daß in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

Aufgabe 060723:

Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5 555 auf, jede genau einmal.

Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Aufgabe 060724:

In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der Gefäßhöhe.

Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

6. Mathematik-Olympiade 1966/67
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060731:

Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist.

Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$!

Aufgabe 060732:

In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe:

Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.

Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

Aufgabe 060733:

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:

(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.

(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$.

Aufgabe 060734:

Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ unkürzbar und keine ganzen Zahlen sind.

Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung an, wobei
im ersten Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im zweiten Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im dritten Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

Aufgabe 060735:

Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz:

Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.

Beweise diesen Satz!

Aufgabe 060736:

In einem gleichschenkligen Dreieck ΔABC habe der Winkel $\sphericalangle ACB$ ein Gradmaß von 120°.

Beweise, daß die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

7. Mathematik-Olympiade 1967/68
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070711:

Bei einer Mathematikarbeit erzielten die 36 Schüler einer Klasse folgende Ergebnisse:

a) $\frac{5}{12}$ der Anzahl aller dieser Schüler erhielten eine Drei,

b) $\frac{2}{5}$ von der unter a) genannten Anzahl erreichte die Note Eins.

c) Die Anzahl der Vieren war ebenso groß wie die der Einsen.

d) Die Anzahl der Vieren betrug $\frac{3}{4}$ von der Anzahl der Zweien.

e) Die Anzahl der Fünfen ergibt sich aus a) bis d).

Gib die Zensurenverteilung bei dieser Mathematikarbeit an!

Aufgabe 070712:

Untersuche, ob man ein konvexes Sechseck zeichnen kann, bei dem genau vier Innenwinkel spitz sind!

Aufgabe 070713:

Gib sämtliche Geldbeträge bis zu 1 MDN an, die sich unter alleiniger Verwendung von Einpfennig-, Fünfpfennig- und Zehnpfennigstücken (wobei von jeder Sorte stets mindestens ein Stück zu nehmen ist) auszahlen lassen und bei denen der in Pfennig angegebene Geldbetrag genau doppelt so groß ist wie die benötigte Anzahl der Münzen!

Aufgabe 070714:

In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\sphericalangle DAB$ ein spitzer Winkel. Vom Punkt C wird das Lot auf die Gerade g_{AB} gefällt, sein Fußpunkt sei E. Man verbinde E mit dem Mittelpunkt F der Seite AD.

Beweise: Der Winkel $\sphericalangle EFD$ ist doppelt so groß wie der Winkel $\sphericalangle BEF$!

7. Mathematik-Olympiade 1967/68
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070721:

Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzubeschreiben, daß der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Quadrat eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 070722:

Horst sagt zu Klaus: Nenne mir eine dreistellige natürliche Zahl, von deren Ziffern keine Null ist und keine zwei einander gleich sind! Notiere sie und schreibe darunter sämtliche dreistelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern der genannten Zahl entstehen können! Addiere alle diese Zahlen! Ehe Klaus fertig war, hatte Horst schon längst das Ergebnis im Kopf gefunden. Er rechnete: $2Q \cdot 111$, wobei Q die Quersumme der erstgenannten Zahl bedeutet.

Begründe sein Verfahren allgemein und gib dann ein Zahlenbeispiel!

Aufgabe 070723:

Gegeben ist ein Dreieck ΔABC. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkt N.

Beweise, daß N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

Aufgabe 070724:

Auf einer Exkursion fuhren mit Autobussen genau 319 Schüler, auf einer anderen Exkursion genau 232. In jedem der Autobusse, die insgesamt dabei fuhren, saß genau die gleiche Anzahl Schüler.

Ermittle diese Anzahl! (Wir setzten dabei voraus, daß in jedem Autobus mehr als ein Schüler saß.)

7. Mathematik-Olympiade 1967/68
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070731:

Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.

Wieviel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

Aufgabe 070732:

Beweise folgende Behauptung!

Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks ΔABC und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

Aufgabe 070733:

Drei Angler fuhren zum Fischfang. Der erste fing 3 Fische, der zweite 4 und der dritte keinen. Die Fischer brieten alle 7 Fische, verteilten sie gleichmäßig unter sich und frühstückten. Zum Spaß gab der dritte Fischer seinen beiden Kameraden 7 Pfennige, um die von ihm verzehrten Fische zu "bezahlen".

Wie müßten die 7 Pfennige unter diesen Umständen verteilt werden?

Aufgabe 070734:

Gegeben sei die Gleichung $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 = x - \frac{3}{4}$. In dieser Gleichung soll der Summand 7 so durch eine andere Zahl ersetzt werden, daß $x = 11$ die Gleichung erfüllt.

Wie lautet diese Zahl?

Aufgabe 070735:

Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m, die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen.

Beweise, daß das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 läßt!

Aufgabe 070736:

Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks ΔABC werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $\overline{BB'} = \overline{AB}$, $\overline{CC'} = \overline{BC}$ und $\overline{AA'} = \overline{CA}$, abgetragen.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

8. Mathematik-Olympiade 1968/69
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080711:

Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen ist 6, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist 210.

Ermittle alle Zahlenpaare mit den genannten Eigenschaften!

Aufgabe 080712:

Gegeben seien drei Gefäße, die genau 3 Liter, 8 Liter bzw. 18 Liter fassen können. Weiterhin ist die Möglichkeit gegeben, die Gefäße hinreichend oft mit Wasser zu füllen, zu leeren und ineinander umzufüllen.

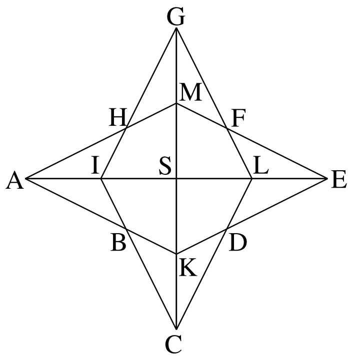
Zeige, daß es möglich ist, alle ganzzahligen Litermengen von 1 bis 18 unter ausschließlicher Verwendung der drei Gefäße abzumessen!

Aufgabe 080713:

Gegeben sei ein konvexes Sechseck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen und gleich lang sind.

Zeichne alle Diagonalen ein, und beweise, daß es einen von den Eckpunkten des Sechsecks verschiedenen Punkt gibt, in dem sich genau drei Diagonalen schneiden!

Aufgabe 080714:



Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonalenlängen sollen im Verhältnis 2 : 1 stehen, so daß die Strecken AE und CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.

Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ mit dem des Achtecks $IBKDLFMH$!

8. Mathematik-Olympiade 1968/69
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080721:

Ulrike geht einkaufen. Sie hat genau $9,27\,\mathrm{M}$ bei sich, darunter genau 12 Einpfennigstücke, und kauft im Konsum für insgesamt $2,36\,\mathrm{M}$ ein. Beim Bezahlen stellt sie fest, daß sie nicht passend bezahlen kann. Der kleinstmögliche ausreichende Betrag, den sie der Verkäuferin geben kann, beträgt $4\,\mathrm{M}$.

Ermittle, was für Geldstücke oder Geldscheine und wieviel von jeder Sorte Ulrike nach diesen Angaben bei sich haben konnte!

Aufgabe 080722:

Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$

a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt!

b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt!

Aufgabe 080723:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3\,\mathrm{cm}$, $c = 5,5\,\mathrm{cm}$ und $h_c = 3\,\mathrm{cm}$!

Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

Aufgabe 080724:

Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck $ABCDE$ ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

8. Mathematik-Olympiade 1968/69
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080731:

Gesucht sind natürliche Zahlen, die beim Teilen durch 7 den Rest 4, beim Teilen durch 4 den Rest 3 und beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen.

a) Ermittle die kleinste derartige natürliche Zahl!

b) Wie kann man aus der in a) gesuchten Zahl weitere natürliche Zahlen erhalten, die den gleichen Bedingungen genügen?

Aufgabe 080732:

Gegeben sei eine positive ganze Zahl n. Man denke sich alle Darstellungen von n als Summe von genau zwei voneinander verschiedenen positiven ganzzahligen Summanden gebildet. Dabei sollen Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, wie z.B. $9 = 4 + 5$ und $9 = 5 + 4$, als nicht verschieden angesehen werden.

Ermittle

a) für $n = 7$,

b) für $n = 10$,

c) für beliebiges (positives ganzzahliges) n

die Anzahl aller dieser Darstellungen!

Aufgabe 080733:

Beweise folgenden Satz!

Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks ΔABC das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

Aufgabe 080734:

Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet, deren jede für 4 Glühlampen vorgesehen ist. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, daß einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele nur eine einzige enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich genau 2 Glühlampen.

Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln.

Aufgabe 080735:

Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1.

Konstruiere ein Dreieck ΔABC, in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!

Aufgabe 080736:

Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geboren.

Auf welchen Wochentag fiel sein Geburtstag?

(Der 30.04.1967 war ein Sonntag; die Jahre 1800 und 1900 waren keine Schaltjahre).

9. Mathematik-Olympiade 1969/70
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090711:

Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechtecksfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet ist!

O	N	G	A
W	G	F	L

Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge $W\ O\ L\ F\ G\ A\ N\ G$ übereinander liegen!

Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

Aufgabe 090712:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Darin sei die die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, daß diese sich im Innern des Dreiecks ΔABC, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.

Beweise, daß die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

Aufgabe 090713:

Eine Touristengruppe aus der DDR von genau 100 Personen fuhr ins Ausland. Über diese Gruppe sind folgende Angaben bekannt:

(1) Genau 10 Touristen beherrschen weder Russisch noch Englisch.

(2) Genau 75 Touristen beherrschen Russisch.

(3) Genau 83 Touristen beherrschen Englisch.

Ermittle die Anzahl aller Touristen dieser Gruppe, die beide Sprachen beherrschen!

Aufgabe 090714:

Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl (z.B. 357). Schreibt man hinter diese Zahl noch einmal die gleiche Zahl, so erhält man eine sechsstellige Zahl (im Beispiel 357 357).

Beweise, daß für jede sechsstellige Zahl, die auf diese Weise entstehen kann, die folgende Behauptung gilt:

> Dividiert man die sechsstellige Zahl zuerst durch 7, dann den gefundenen Quotienten durch 11 und den jetzt gefundenen Quotienten durch 13, so erhält man die dreistellige Ausgangszahl!

9. Mathematik-Olympiade 1969/70
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090721:

Vater und Sohn gehen nebeneinander. In der gleichen Zeit, in der der Vater 4 Schritte macht, macht der Sohn jedesmal 5 Schritte, und in dieser Zeit legen beide jedesmal genau den gleichen Weg zurück. Die durchschnittliche Schrittlänge des Vaters beträgt 80 cm.

a) Wie groß ist die durchschnittliche Schrittlänge des Sohnes?

b) Wir nehmen an, daß beide gleichzeitig mit dem rechten Fuß beginnen. Nach dem wievielten Schritt des Vaters treten beide erstmalig gleichzeitig mit dem linken Fuß auf?

Aufgabe 090722:

Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks "ausgezeichnet" nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind.

Ermittle die größtmögliche Anzahl "ausgezeichneter" Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

Aufgabe 090723:

Ein Tourist war an drei aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs.

Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h. Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h. Der an den drei Tagen zurückgelegte Gesamtweg betrug 520 km.

Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen der Tage unterwegs war, und die Anzahl der am ersten, zweiten bzw. dritten Tage zurückgelegten Kilometer!

Aufgabe 090724:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC.

Beweise, daß dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

9. Mathematik-Olympiade 1969/70
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090731:
Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2 555, jede genau einmal, aufgeschrieben.

Ermittle die Anzahl der Ziffer 9, die dabei insgesamt geschrieben werden müssten!

Aufgabe 090732:
Die Maßzahlen a, b, c der Seitenlängen eines Dreiecks sollen die Bedingungen

(I) $a + b = 38$,

(II) $b + c = 46$,

(III) $a + c = 42$

erfüllen.

Ermittle unter Berücksichtigung dieser Bedingungen

a) die Maßzahl jeder Seitenlänge!

b) Weise nach, daß ein Dreieck existiert, das den Bedingungen (I), (II), (III) genügt!

(Gleiche Maßeinheiten seien wie üblich vorausgesetzt.)

Aufgabe 090733:
Beweise folgenden Satz!

Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen!

Aufgabe 090734:
Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.

a) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?

b) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

Aufgabe 090735:

Beweise folgenden Satz!

Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

Aufgabe 090736:

Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\overline{\sphericalangle BAD} = 110^\circ$ und $\overline{AC} + \overline{BD} = 15$ cm!

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle BAD}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$.

10. Mathematik-Olympiade 1970/71
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100711:

Bei einem Sportfest soll zwischen jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:

Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m × 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen. Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, daß sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist.

Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

Aufgabe 100712:

Die Zahl 17 soll als Summe von Quadraten natürlicher, von 0 verschiedener Zahlen dargestellt werden. Gib alle voneinander verschiedenen Möglichkeiten an!

Anmerkung: Zwei Darstellungen dieser Art gelten genau dann als verschieden voneinander, wenn wenigstens ein Summand in der einen Darstellung nicht ebenso oft auftritt wie in der anderen Darstellung.

Aufgabe 100713:

a) Beweise folgenden Satz: Wenn vier natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für jede gerade Anzahl von natürlichen Zahlen der folgende Satz gilt:

Wenn diese natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, so haben sie als Produkt eine gerade Zahl.

Aufgabe 100714:

$ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $\overline{AB} \geq \overline{BC}$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle BCD$ mit DB, und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB.

Man beweise, daß unter diesen Bedingungen $\sphericalangle A_1AA_2 \cong \sphericalangle A_2AC \cong \sphericalangle ACC_2 \cong \sphericalangle C_2CC_1$ gilt.

Dabei sind folgende Fälle zu betrachten:

a) $\overline{AB} = \overline{BC}$,

b) $\overline{AB} > \overline{BC}$.

10. Mathematik-Olympiade 1970/71
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100721:

In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70% aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30% aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen.

Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:

(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.

(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.

(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.

(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10% erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

Aufgabe 100722:

In einem Dreieck ΔABC seien die Größe der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60°$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ und CC' die des Winkels $\sphericalangle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C'). Ferner seien die Größen der Winkel $\sphericalangle AB'B$ bzw. $\sphericalangle AC'C$ mit ϵ bzw. δ bezeichnet.

Beweise, daß für jedes derartige Dreieck $\epsilon + \delta = 180°$ gilt!

Aufgabe 100723:

Ermittle alle Möglichkeiten, eine natürliche Zahl t und eine Ziffer * so anzugeben daß die folgende Gleichung gilt: $9\,(230 + t)^2 = 492 * 04$!

Aufgabe 100724:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $\alpha = 70°$, $s_b = 7$ cm, $h_c = 5$ cm!

Dabei sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

10. Mathematik-Olympiade 1970/71
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100731:

Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, daß man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.

(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.

(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.

(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.

(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.

(6) Am Anfang und am Schluß der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

Aufgabe 100732:

Gegeben sei ein Winkel der Größe $60°$ mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.

Beweise, daß sich die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

Aufgabe 100733:

Von den Schülern einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG).

Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

Aufgabe 100734:

Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:

> "Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert.
>
> Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!"

Aufgabe 100735:

Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 79 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne daß dabei die Primzahleigenschaft verloren geht.

Untersuche, ob es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern gibt, bei denen man bei sämtlichen möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen erhält! (Ohne Benutzung der Zahlentafel)

Aufgabe 100736:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 5,5$ cm; $b = 3,5$ cm; $s_c = 3$ cm!

Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $\overline{CD} = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

11. Mathematik-Olympiade 1971/72
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110711:
Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen Z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl Z ist durch 8 teilbar.

(2) Die Ziffern von Z sind paarweise voneinander verschieden, d.h. in jeder dieser Zahlen darf jede Ziffer höchstens einmal auftreten.

(3) Alle verwendeten Ziffern bezeichnen, einzeln für sich betrachtet, jeweils Primzahlen.

Aufgabe 110712:
Beweise folgenden Satz:

Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite)!

Aufgabe 110713:
Günther zeichnet ein Dreieck ΔABC und stellt fest:

Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks ΔABC ist eine Primzahl. Ferner gilt $\overline{BC} = a = 6$ cm, $\overline{AC} = b = 2$ cm.

Ermittle $\overline{AB} = c$ und u!

Aufgabe 110714:
Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus b, c (mit $c > b$) und $\alpha + \beta$!

Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

11. Mathematik-Olympiade 1971/72
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110721:
Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

Aufgabe 110722:
Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.

(2) Keine Partie endete unentschieden (remis).

(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.

(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}$ ihrer Spiele.

(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

Aufgabe 110723:
Beweise folgenden Satz:

In jedem spitzwinkligen Dreieck ΔABC hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht!

Aufgabe 110724:
Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $\overline{BC} = 3,5$ cm; $\overline{CD} = 3,5$ cm; $\overline{AC} = 5$ cm; $\sphericalangle DAB = 75°$ und $\sphericalangle ABC = 120°$!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

11. Mathematik-Olympiade 1971/72
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110731:
Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) $p < 100$.

(2) p läßt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.

(3) p läßt bei Division durch 4 den Rest 1!

Aufgabe 110732:
In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.

Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.

(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.

(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.

(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.

(5) Die Anzahl der Schüler, die nur Turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.

(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.

(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball

b) Leichtathletik

c) Schwimmen

d) Turnen

beteiligen!

Aufgabe 110733:

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, daß $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $\overline{P_2D} = 3\,\overline{CP_2}$ und auf DA liege ein Punkt P_3 mit $\overline{P_3A} = 3\,\overline{DP_3}$.

Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.

Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.

Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_Q : A_V$

a) am größten,

b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!

Dabei sei auch zugelassen, daß P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

Aufgabe 110734:

Fritz erzählt:

"In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen."

Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

Aufgabe 110735:

Beweise den folgenden Satz:

Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite!

Aufgabe 110736:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $c = 5\,\text{cm}$, $h_a = 4,5\,\text{cm}$, $s_a = 5,5\,\text{cm}$! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

12. Mathematik-Olympiade 1972/73
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120711:

Klaus hatte an einem Sonnabend um 12.00 Uhr seine Armbanduhr nach dem Zeitzeichen von Radio DDR eingestellt. Er bemerkte am folgenden Sonntag um 12.00 Uhr beim Zeitzeichen, daß seine Uhr um genau 6 Minuten nachging, vergaß aber, sie richtig zu stellen. Er wollte am folgenden Montag früh genau um 8.00 Uhr fortgehen.

Welche Zeit zeigte seine Uhr zu dieser Uhrzeit an, wenn angenommen wird, daß seine Uhr während der ganzen Zeit gleichmäßig lief?

Aufgabe 120712:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt:

(1) Die Zahl z ist sowohl durch 9 als auch durch 11 teilbar.

(2) Vertauscht man bei der Zahl z die an der Hunderterstelle stehende Ziffer mit der an der Einerstelle stehenden, so erhält man eine neue dreistellige Zahl z', die $\frac{2}{9}$ der Zahl z beträgt.

Aufgabe 120713:

Beweise den folgenden Satz:

Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ($\overline{AD} = \overline{BC}$) die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe!

Aufgabe 120714:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck ΔABC_1 ist flächengleich zu dem Dreieck ΔABC,

(2) $\overline{AC} = \overline{AC_1}$.

(3) $C \neq C_1$.

a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!

b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks ΔABC abhängt! (Fallunterscheidung)

12. Mathematik-Olympiade 1972/73
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120721:
Man ermittle die Paare (x, y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15 390.

(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

Aufgabe 120722:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d.h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 120723:
Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.

(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.

(3) Christoph ist älter als Detlef.

(4) Bildet man alle möglichen "Doppel" (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser "Doppel" aus zwei gleichaltrigen Spielern.

(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler? (Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

Aufgabe 120724:
Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!

Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

12. Mathematik-Olympiade 1972/73
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120731:

An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:

(1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.

(3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.

(4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.

(6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.

(7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die

a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,

b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

Aufgabe 120732:

Beweise, daß es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist!

Aufgabe 120733:

Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\,\text{cm}$,

(2) $\overline{\sphericalangle EAB} = \overline{\sphericalangle ABC} = 95°$,

(3) $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$,

(4) $\overline{AE} = \overline{ED}$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 120734:

Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier "Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch zu erkennen war, an welcher Stelle sie gestanden hatten.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen: (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben a, b, c, ... angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & a & b & \cdot & c & d \\ \hline & e & f & g & 1 & & & \\ h & i & j & 1 & & & & \\ \hline k & m & n & 1 & p & & & \end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd: "Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!" Doch Gerd entgegnete ihm: "Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten."

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte! Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!

Aufgabe 120735:

Ermittle alle nichtnegativen rationalen Zahlen x, die die Gleichung $x + |x - 1| = 1$ erfüllen!

Aufgabe 120736:

Beweise den folgenden Satz:

Für jedes Dreieck ΔABC gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt!

13. Mathematik-Olympiade 1973/74
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130711:
Gib sämtliche Teiler der Zahl 111 111 an!

Aufgabe 130712:
Beweise den folgenden Satz:

Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck!

Aufgabe 130713:
Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$ mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.

Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Aufgabe 130714:
An einer Kreisolympiade Junger Mathematiker nahmen in der Olympiadeklasse 7 Anneliese, Bertram, Christiane, Detlev, Erich und Franziska teil. Genau zwei von ihnen erhielten Preise. Auf die Frage, welche beiden Teilnehmer das waren, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anneliese und Christiane

(2) Bertram und Franziska

(3) Anneliese und Franziska

(4) Bertram und Erich

(5) Anneliese und Detlev.

Wie sich später herausstellte, waren in genau einer Antwort beide Namen falsch angegeben, während in jeder der übrigen vier Antworten genau ein Name richtig angegeben war.

Wie heißen die beiden Preisträger?

13. Mathematik-Olympiade 1973/74
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130721:

Die 36 Schüler einer 7. Klasse nehmen am außerunterrichtlichen Sport teil, und zwar jeder in genau einer der Sektionen Leichtathletik, Tischtennis, Schwimmen, Judo und Schach. Über die Teilnahme der Schüler dieser Klasse an diesen Sektionen ist weiter bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte betreibt Leichtathletik.

(2) Es gehören mehr der Sektion Schwimmen als der Sektion Tischtennis an.

(3) Die Summe aus der Anzahl der Mitglieder der Sektion Schach und der Sektion Judo beträgt genau ein Neuntel aller Schüler.

(4) In der Sektion Tischtennis befinden sich doppelt so viele Schüler wie in der Sektion Schach.

(5) Die Anzahl der Sektionsmitglieder Schach ist größer als das Doppelte, jedoch kleiner als das Vierfache der Anzahl der Sektionsmitglieder Judo.

Ermittle für jede der genannten Sektionen die Anzahl der Schüler der erwähnten Klasse, die Mitglieder dieser Sektion sind!

Aufgabe 130722:

Karl sucht drei von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, für die folgendes gilt:

$(a, b) = 4$ (lies: Der ggT der Zahlen a und b ist 4),
$(a, c) = 6$,
$(b, c) = 14$.

Er behauptet nach einigem Probieren, daß es sogar mehr als eine Möglichkeit gibt, drei solche Zahlen anzugeben.

Ist diese Behauptung richtig?

Gibt es eine Möglichkeit der Wahl dreier solcher Zahlen a, b, c, bei der, verglichen mit allen übrigen Möglichkeiten, a am kleinsten und zugleich b am kleinsten und zugleich c am kleinsten ist? Wenn ja, dann gib für diesen Fall die Zahlen a, b, c an!

Aufgabe 130723:

Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:

Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von $90°$, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

Aufgabe 130724:

Es sei ΔABC ein Dreieck, in dem die Größe γ des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.

Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so daß $\overline{\sphericalangle BPA} = 2\gamma$ gilt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

13. Mathematik-Olympiade 1973/74
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130731:

Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.

(2) Vater und Mutter sind zusamment dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.

(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.

(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

Aufgabe 130732:

Zeige, daß für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)\,p\,(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 130733:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a - c = 3\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $d = 6\,\text{cm}$, $e = 9\,\text{cm}$! Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 130734:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!

Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit $v = 0$ oder $w = 0$ zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

Aufgabe 130735:

Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.

Beweise: $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MN}$!

Aufgabe 130736:

Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in genau 27 s (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).

An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in genau 9 s vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger genau 9 m zurückgelegt.

Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

14. Mathematik-Olympiade 1974/75
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140711:

Klaus behauptet, er habe in seiner Geldtasche genau 17 Münzen mit einem Gesamtwert von 34 Pfennig.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte Klaus hiernach besitzen kann! Es sei dabei vorausgesetzt, daß nur Münzen der zur Zeit gültigen Währung der DDR in Betracht kommen.

Aufgabe 140712:

Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, daß seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt. Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, daß eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.

Ermittle, um wieviel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muß!

Aufgabe 140713:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3,2$ cm, $a = 5,6$ cm und $h_a = 4,4$ cm!

Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

Aufgabe 140714:

Beweise folgende Sätze:

a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.

b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

14. Mathematik-Olympiade 1974/75
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140721:

Drei Schülerinnen mit den Vornamen Angelika, Beate und Christine und den Zunamen Müller, Naumann und Richter beteiligten sich am alpha-Wettbewerb. Folgendes ist über sie bekannt:

(1) Die Schülerin Naumann nahm zum ersten Mal teil.

(2) Die Schülerin Richter erhielt eine schlechtere Bewertung als mindestens eine der anderen Schülerinnen.

(3) Die Schülerin Müller benutzte nur liniiertes Papier.

(4) Angelika erzielte das schlechteste Ergebnis.

(5) Beate hatte bereits im Vorjahr das alpha-Abzeichen erhalten.

(6) Die erfolgreichste der drei Schülerinnen verwendete nur unliniiertes Papier.

Ermittle den Vor- und Zunamen der erfolgreichsten der drei Schülerinnen!

Aufgabe 140722:

Beweise folgende Aussage:

Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat, daß für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung

(1) $\overline{DB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Aufgabe 140723:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5,5$ cm! Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 140724:

Fritz hat von seinem Freund Max für 6 Tage ein Buch geliehen. Zu seinem Freund Paul, der das Buch nach ihm leihen möchte, sagt er am Morgen des 6. Tages:

> "Am ersten Tag las ich den 12. Teil des Buches, an den folgenden 4 Tagen jeweils ein Achtel, und heute muß ich noch, wenn ich das ganze Buch lesen will, 20 Seiten weniger lesen, als ich in den vergangenen Tagen zusammen gelesen habe.
>
> Wieviel Seiten hat das Buch insgesamt?"

Untersuche, welche Möglichkeiten es für Paul gibt, auf diese Frage so zu antworten, daß alle Angaben von Fritz zutreffen!

14. Mathematik-Olympiade 1974/75
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140731:

Fritz, Hans, Ulrich und Werner sind Schüler verschiedener Klassenstufen, und zwar der Klassen 5, 6, 7, 8. Sie gingen Pilze sammeln.

Folgendes ist bekannt:

(1) Der Schüler der Klasse 5 und außer ihm noch Ulrich fanden je 8 Steinpilze; der Schüler der Klasse 7 fand keinen einzigen Steinpilz.

(2) Fritz, Hans und außer ihnen der Schüler der 6. Klasse fanden viele Rotkappen.

(3) Drei Schüler, nämlich der Schüler der Klasse 8, der Schüler der Klasse 7 und Hans, lachten über den vierten Schüler, nämlich Werner, der einen Fliegenpilz mitgebracht hatte.

Wer von den vier Schülern ist Schüler der Klasse 5, wer der 6, wer der 7 und wer der 8?

Aufgabe 140732:

Beweise: Unter je vier beliebigen natürlichen Zahlen gibt es mindestens zwei, deren Differenz durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 140733:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b - c = 3$ cm, $\alpha = 55°$ und $\beta = 85°$!

Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 140734:

In einem VEB wurde eine bestimmte Art von Werkstücken zuerst in der Abteilung A_1 und danach in der Abteilung A_2 bearbeitet. Dabei konnte zunächst in der einen Abteilung täglich dieselbe Anzahl von Werkstücken bearbeitet werden wie in der anderen.

Mit Hilfe von Rationalisierungsmaßnahmen in beiden Abteilungen konnten die 53 Arbeiter der Abteilung A_1 ihre Produktion auf 159 % und die 62 Arbeiter der Abteilung A_2 ihre Produktion auf 124 % erhöhen. Da aber aus den angegebenen Gründen der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen gleich groß sein mußte, entschlossen sich hinreichend viele Arbeiter der einen Abteilung dazu, in der anderen Abteilung zu arbeiten.

Welche Anzahl von Arbeitern aus welcher der beiden Abteilungen nahm ihre Arbeit in der anderen Abteilung auf, wenn erreicht wurde, daß der Produktionsausstoß in beiden Abteilungen danach wieder gleich groß war?

Auf wieviel Prozent der Produktionsmenge vor den Rationalisierungsmaßnahmen war damit insgesamt der Produktionsausstoß gestiegen?

Bemerkungen: Es sei angenommen, daß der Produktionsausstoß beider Abteilungen jeweils der Zahl der Arbeiter proportional ist.

Aufgabe 140735:

Der Umfang eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b, c beträgt 34 cm. Weiterhin gilt $a : b = 3 : 8$ und $b : c = 4 : 3$.

Ermittle die Seitenlängen!

Aufgabe 140736:

Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ geht. Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ ermitteln.

Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\sphericalangle ABC$!

15. Mathematik-Olympiade 1975/76
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150711:

Zwei Mathematiker unterhalten sich über ihre unterschiedlichen Telefonnummern. Dabei stellte sich folgendes heraus:

(1) Jede der beiden Telefonnummern ist eine dreistellige Primzahl.

(2) Jede einzelne Ziffer in den beiden Telefonnummern stellt, als einstellige Zahl aufgefaßt, ebenfalls eine Primzahl dar.

(3) Die Ziffern, die in den beiden Telefonnummern jeweils an der Zehnerstelle stehen, stimmen miteinander überein. Die Ziffer der Hunderterstelle der einen Telefonnummer ist die Ziffer der Einerstelle der anderen und umgekehrt.

Ermittle die Telefonnummern, und begründe das Ergebnis, ohne dabei eine Primzahlentabelle als Beweismittel zu verwenden!

Aufgabe 150712:

Zwei Gefäße, A bzw. B genannt, haben zusammen ein Fassungsvermögen von genau 8 Litern. Auf beide Gefäße ist eine bestimmte Wassermenge W so verteilt, daß A zur Hälfte und B ganz gefüllt ist. Gießt man nun soviel Wasser aus B in A, daß A ganz gefüllt ist, so ist B noch zu einem Sechstel gefüllt. Gefragt wird

a) nach dem Fassungsvermögen von jedem der Gefäße A und B,

b) nach der Wassermenge W.

Ermittle alle in a) und b) erfragten Angaben, die die genannten Eigenschaften haben!

Aufgabe 150713:

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.

Beweise, daß die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, daß also $\overline{AC} = \overline{BD}$ und $AC \parallel BD$ gilt!

Aufgabe 150714:

In der Ebene ϵ seien 50 verschiedene Punkte so gelegen, daß keine Gerade existiert, die drei dieser 50 Punkte enthält. Jeder dieser 50 Punkte soll nun mit jedem anderen durch eine Strecke verbunden werden.

a) Ermittle die Anzahl der Verbindungsstrecken!

b) Angenommen, die 50 Punkte seien die Eckpunkte eines konvexen 50-Ecks. Ermittle die Anzahl der Diagonalen des 50-Ecks!

15. Mathematik-Olympiade 1975/76
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150721:

a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.

   Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!

b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, daß die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa "auf Lücke" gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.

   Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

Aufgabe 150722:
Das Ehepaar Winkler hat genau drei Kinder.

Am 1. Januar 1975 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle fünf Familienmitglieder waren zusammen so alt wie der eine Großvater, und dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.

Wie alt war jede der genannten Personen am 1. Januar 1975?

Anmerkung: Alle Altersangaben sind in vollen Lebensjahren zu verstehen.

Aufgabe 150723:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{\sphericalangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overline{\sphericalangle ABC} - \overline{\sphericalangle CAB} \right|$$

gilt!

Aufgabe 150724:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm! Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

15. Mathematik-Olympiade 1975/76
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150731:

Die Fußballmannschaften der Klassen 7a, 7b, 8a und 8b belegten beim Schulsportfest die ersten vier Plätze. Auf die Frage, welchen Platz jede der vier Mannschaften belegte, gaben die Pioniere Antje, Benno und Chris jeder zwei Antworten, von denen jeweils eine wahr und eine falsch ist.

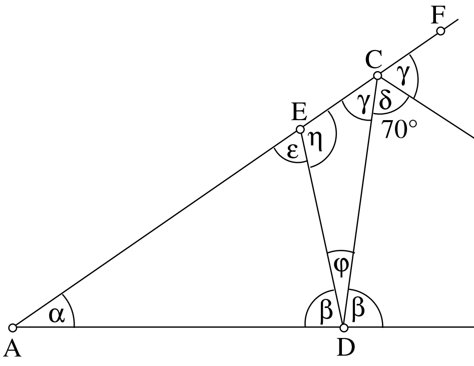
Antje: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den dritten Platz.

Benno: (1) Die Mannschaft der Klasse 8a belegte den ersten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 7b belegte den zweiten Platz.

Chris: (1) Die Mannschaft der Klasse 7a belegte den zweiten Platz.
(2) Die Mannschaft der Klasse 8b belegte den vierten Platz.

Untersuche, welche Verteilungen der vier Mannschaften 7a, 7b, 8a und 8b auf die vier Plätze den wahren Antworten der Pioniere entsprechen!

Aufgabe 150732:



In der abgebildeten Figur gelte:

$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$,
$\overline{\sphericalangle ADE} = \overline{\sphericalangle BDC} = \beta$,
$\overline{\sphericalangle ACD} = \overline{\sphericalangle BCF} = \gamma$,
$\overline{\sphericalangle BCD} = \delta$,
$\overline{\sphericalangle AED} = \epsilon$,
$\overline{\sphericalangle CED} = \eta$,
$\overline{\sphericalangle EDC} = \psi$.

Es sei $\delta = 70°$.

Ermittle α, β, γ, ϵ, η, und ψ!

Aufgabe 150733:

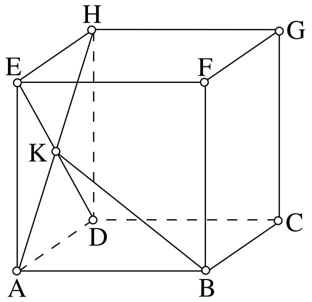
Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, daß sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d.h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, daß jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und daß jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

Aufgabe 150734:

Ein Zug fährt genau 15 Minuten später von einem Bahnhof B ab, als es der Fahrplan vorsieht. Deshalb fährt er mit 120 % der auf dieser Strecke üblichen Durchschnittsgeschwindigkeit so lange, bis der Rückstand aufgeholt ist.

Nach wieviel Minuten (gerechnet von der tatsächlichen Abfahrtszeit des Zuges an) ist das der Fall?

Aufgabe 150735:



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H. K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE.

Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!

Aufgabe 150736:

Ist z eine natürliche Zahl, so sei a die Quersumme von z, b die Quersumme von a und c die Quersumme von b.

Ermittle c für jede $1\,000\,000\,000$-stellige durch 9 teilbare Zahl z!

16. Mathematik-Olympiade 1976/77
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160711:

Bei der 3. Stufe der XV. Mathematikolympiade erhielten die sechs Thälmann-Pioniere Anita, Bernd, Christine, Doris, Erich und Fritz je einen Preis. Genau zwei von ihnen erhielten volle Punktzahl.

Auf die Frage, welche beiden Pioniere volle Punktzahl erhielten, wurden folgende fünf Antworten gegeben:

(1) Anita und Christine;

(2) Anita und Fritz;

(3) Bernd und Fritz;

(4) Anita und Doris;

(5) Bernd und Erich.

Anschließend wurde festgestellt, daß in genau einer dieser fünf Antworten beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier jeweils eine Angabe wahr und eine falsch ist.

Wie heißen nach dieser Feststellung die beiden Preisträger, die die volle Punktzahl erhielten? Überprüfe, ob sich diese Frage aus den vorliegenden Antworten eindeutig beantworten läßt!

Aufgabe 160712:

Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... u.s.w. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213...9899100$ entsteht.

a) Wieviel Stellen hat z?

b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellte Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll an der Reihenfolge der (in z') verbleibenden Ziffern von z nichts geändert werden.

   Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten zehn Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 160713:

Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.

Beweise folgenden Satz:

Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $\overline{AS} = \overline{BS}$

Aufgabe 160714:

Bei einem Radrennen auf einem Rundkurs von 1 km Länge hatte zu einem bestimmten Zeitpunkt der Radsportler A genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler B. B fuhr mit einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, A mit einer Geschwindigkeit von $45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Nach wieviel Minuten von dem angegebenen Zeitpunkt an gerechnet holte B den Fahrer A das erste Mal ein, wenn angenommen wird, daß beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhren?

b) Nach wieviel weiteren Minuten würde B den Fahrer A zum zweiten Mal einholen ("überrunden"), wenn beide Fahrer auch weiterhin mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Wieviele Runden hätte A und wieviele B zwischen dem ersten und dem zweiten Mal des Überholens zurückgelegt?

16. Mathematik-Olympiade 1976/77
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160721:

Nach der Jugendweihefeier ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Foto genügend viele Abzüge herstellen, und dann tauschte jeder Schüler dieser Klasse mit jedem seiner Klassenkameraden sein Foto aus.

Wieviel Schüler tauschten insgesamt in dieser Klasse miteinander die Fotos aus, wenn dabei genau 812 Fotografien ihren Besitzer wechselten?

Aufgabe 160722:

Eine Gärtnerische Produktionsgenossenschaft verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September.

Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August?

Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Aufgabe 160723:

Konstruiere aus $a = 5,0$ cm und $b = 7,0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.

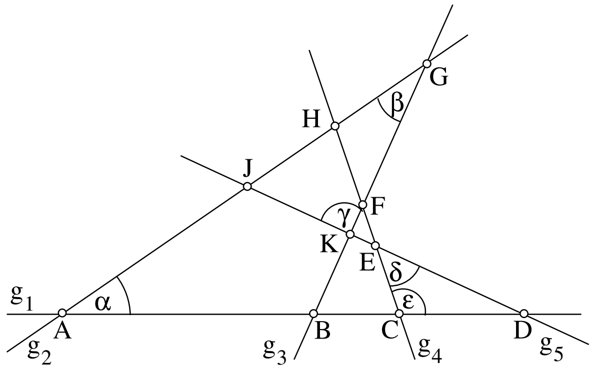
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 160724:

Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden.

Gegeben seien die Größen der Winkel $\sphericalangle BAJ$, $\sphericalangle HGF$, $\sphericalangle FKJ$ und $\sphericalangle DEC$ in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt.

Ermittle die Größe ϵ des Winkels $\sphericalangle DCE$!



16. Mathematik-Olympiade 1976/77
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160731:

Von 12 Mädchen einer Klasse ist bekannt, daß alle im selben Jahr, aber keine zwei im gleichen Monat geboren sind. Multipliziert man jeweils die Zahl, die den Tag des Geburtsdatums angibt, mit der Zahl, die den Monat des Geburtsdatums angibt, so erhält man für die zwölf Mädchen die folgenden Produkte:

> Astrid 49, Beate 3, Christina 52, Doris 130, Evelyn 187, Friederike 300, Gudrun 14, Heike 42, Ines 81, Kerstin 135, Liane 128 und Martina 153.

Ermittle aus diesen Angaben den Geburtstag von jeder der zwölf Schülerinnen!

Aufgabe 160732:

Beweise den folgenden Satz:

> In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 160733:

Unter ”Primzahldrillingen” wollen wir drei Primzahlen verstehen, die sich in der Form p, $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.

Beweise, daß es genau eine Zahl p gibt, für die p, $p+2$, $p+4$ ”Primzahldrillinge” sind, und ermittle diese!

Aufgabe 160734:

Im Rahmen der Hans-Beimler-Wettkämpfe an der Schule beteiligte sich Fritz am Entfernungsschätzen.

a) Bei seinem Schätzwert von 350 Metern erfährt er, daß dieser zu klein war, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung. Ermittle die wahre Entfernung!

b) Wie groß wäre die wahre Entfernung, wenn der Schätzwert von Fritz zu groß gewesen wäre, und zwar um genau 12,5% der wahren Entfernung?

Aufgabe 160735:

Ermittle alle Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen, für die die Gleichung $2x + 3y = 27$ erfüllt ist!

Aufgabe 160736:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9,1$ cm, $b = 6,3$ cm, $c = 6,7$ cm und $d = 5,0$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und d die der Seite AD.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

17. Mathematik-Olympiade 1977/78
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170711:

Matthias war in den Sommerferien in einem internationalen Pionierzeltlager. Er berichtet seinen Klassenkameraden:

> "Ein Viertel aller Teilnehmer und vier Pioniere kamen aus der Sowjetunion, ein Fünftel aller Teilnehmer und fünf Pioniere aus der DDR, ein Sechstel aller Teilnehmer und sechs Pioniere aus der CSSR, ein Achtel aller Teilnehmer und acht Pioniere aus der VR Polen, ein Neuntel aller Teilnehmer und neun Pioniere aus der VR Bulgarien. Die übrigen 21 Pioniere kamen aus der Ungarischen Volksrepublik. In jedem Zelt des Lagers waren genau acht Pioniere untergebracht."

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Zelte des Lagers!

Aufgabe 170712:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC. Beweise, daß dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

Aufgabe 170713:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9,7$ cm, $b = 7,6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ und γ die des Winkels $\sphericalangle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 170714:

Der kleine Uwe hat würfelförmige, weiß gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 2 cm und würfelförmige, rot gefärbte Bausteine mit einer Kantenlänge von 3 cm. Er baute einen größeren, zusammengesetzten Würfelkörper auf und verwendete dazu nur Steine dieser beiden Sorten. Dabei bestanden die vier senkrecht stehenden Außenwände aus roten Bausteinen, der restliche Würfelkörper bestand von unten bis oben durchgehend aus weißen Bausteinen.

Ermittle die Anzahl der hierbei verwendeten weißen und die der verwendeten roten Bausteine, wobei vorausgesetzt wird, daß Uwe nicht mehr als 60 Bausteine von jeder Sorte zur Verfügung hatte!

17. Mathematik-Olympiade 1977/78
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170721:

Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist. Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.

(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.

Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

Aufgabe 170722:

a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!

b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!

c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

Aufgabe 170723:

Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, daß die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

Aufgabe 170724:

Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $\overline{9x7y}$ hat!

Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0,...,9) zu ersetzen.

17. Mathematik-Olympiade 1977/78
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170731:

Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die $1\,500 \leq a \leq 2\,650$ gilt.

Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

Aufgabe 170732:

Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Weiter fand er, daß drei Kugeln der Sorte C ebensoviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B und daß fünf Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht haben wie eine Kugel der Sorte C.

a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?

b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

Aufgabe 170733:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 9,0\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 6,0\,\text{cm}$ und $\sphericalangle BCA = 120°$.

Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$ derart, daß D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

Aufgabe 170734:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, daß $\overline{BD} = \overline{AB}$ ist

Beweise, daß dann $\sphericalangle DCA = 90°$ ist!

Aufgabe 170735:

Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:

(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 170736:
In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von $10,0\,\text{cm}$.

a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$.

Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

18. Mathematik-Olympiade 1978/79
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180711:
Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiannamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:

(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.

(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.

Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Zunamen?

Aufgabe 180712:
Berechne

$$a = 1,25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60},$$
$$b = 2,225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6},$$
$$c = \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6 + \left(\frac{45}{56} - 0,375\right),$$
$$d = c - \frac{b}{a}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

Aufgabe 180713:
Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden? (Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

Aufgabe 180714:
Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 läßt!

18. Mathematik-Olympiade 1978/79
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180721:

An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.

(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.

(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Aufgabe 180722:

Von einem Bruch wird gefordert, daß er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat. Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.

(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Aufgabe 180723:

In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, daß die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist. Außerdem sei $\overline{\sphericalangle MAC} = 36°$.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle CMD} = 36°$ ist!

Aufgabe 180724:

Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:

ΔABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB; E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC, F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB. Die Dreiecke ADC, DEC, DFE, und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich. Ferner gilt $\overline{FB} = 15$ cm und $\overline{BE} = 20$ cm.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!

18. Mathematik-Olympiade 1978/79
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180731:

In einem Spezialistenlager für Junge Mathematiker führt Dirk eine Knobelaufgabe vor. Er stellt auf einen Tisch in eine Reihe - für die Zuschauer von links nach rechts - fünf Gefäße auf: eine Flasche, einen Krug, eine Tasse, einen Becher und eine Kanne. Sie sind, nicht notwendig in dieser Reihenfolge, mit je einem der Getränke Tee, Kaffee, Milch, Limonade und Most gefüllt. Den Zuschauern ist nicht bekannt, welches Gefäß welche Flüssigkeit enthält.

Dirk sagt: "Stelle ich die Kanne - wobei ich die anderen Gefäße unverändert stehen lasse - so zwischen zwei der anderen Gefäße, daß unmittelbar links neben ihr das Gefäß mit Tee und unmittelbar rechts neben ihr das Gefäß mit Milch steht, so stehen Milchgefäß und Limonadengefäß unmittelbar nebeneinander, und außerdem steht dann das Gefäß mit Kaffee als mittleres in der Reihe der fünf Gefäße. Findet nun heraus, womit die einzelnen Gefäße gefüllt sind!"

Untersuche, ob allein aus diesen Angaben ermittelt werden kann, welche Getränke sich in jedem der fünf Gefäße befinden. Gib alle mit Dirks Angaben übereinstimmenden Möglichkeiten einer Verteilung der Getränke auf die Gefäße an!

Aufgabe 180732:

Definition: Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k "Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)".

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:

"Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\sphericalangle CAB$ ab."

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\sphericalangle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!

Aufgabe 180733:

Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.

Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, daß P der Mittelpunkt von BD ist!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Aufgabe 180734:

In einem Behälter befinden sich genau 25 kg einer 4%igen wäßrigen Lösung, d.h., 4% dieser Lösung bestehen aus der gelösten Substanz, der Rest besteht aus Wasser.

Wieviel Prozent des Wassers sind dieser Lösung zu entziehen, damit eine neue Lösung entsteht, deren Wasseranteil nur noch 90% beträgt?

Aufgabe 180735:

In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius.

Beweise, daß dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

Aufgabe 180736:

Ermittle alle rationalen Zahlen a mit folgender Eigenschaft:

Das Produkt aus der Zahl a und ihrem absoluten Betrag ist gleich der Summe der Zahl a und ihrem absoluten Betrag.

19. Mathematik-Olympiade 1979/80
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190711:

Eine Gruppe von 8 Schülern hebt bei der Produktionsarbeit im Patenbetrieb einen Graben von 30 cm Breite, 60 cm Tiefe und 20 m Länge aus. Eine zweite Gruppe von 6 Schülern hebt einen Graben von 25 cm Breite, 50 cm Tiefe und 22 m Länge aus.

Es werde vorausgesetzt, daß von jedem der 14 Schüler für das Ausheben gleich großer Volumina gleiche Zeiten benötigt werden (wobei die für das Ausheben eines bestimmten Volumens benötigte Zeit bei allen Schülern dieselbe sei).

Welche der beiden Gruppen benötigt für das Ausheben ihres Grabens unter diesen Voraussetzungen weniger Zeit als die andere?

Aufgabe 190712:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die die Eigenschaft haben, durch jede der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 teilbar zu sein!

Aufgabe 190713:

Es sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.

Beweise hierfür die folgende Aussage:

Wenn $\sphericalangle CAB = 22,5°$ ist, dann gilt $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CDB$!

Aufgabe 190714:

Sechs Schüler halfen bei der Obsternte; Sie erhielten Anerkennungsprämien entsprechend ihren Leistungen. Jeder von ihnen übergab die Hälfte des erhaltenen Geldbetrages dem Solidaritätskonto. Über diese Schüler ist ferner folgendes bekannt:

(1) Keiner von ihnen spendete weniger als 6 M und keiner mehr als 12 M.

(2) Konrad spendete mehr als Peter.

(3) Helga spendete mehr als Gisela, Gisela mehr als Peter, Peter mehr als Inge.

(4) Frank spendete mehr als Helga und Helga mehr als Konrad.

(5) Helga spendete 2 M weniger als Frank, Peter 2 M mehr als Inge.

(6) Alle spendeten volle Markbeträge.

Wieviel Geld erhielt jeder der Schüler für das Obstpflücken?

19. Mathematik-Olympiade 1979/80
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190721:
Dieter, Hans, Klaus und Peter sowie ihre Ehefrauen Erika, Gabi, Rita und Simone tauschen Erinnerungen aus. Ein Zuhörer entnimmt der Unterhaltung folgendes:

(1) Simone und ihr Mann sowie außer ihnen Erika und Hans waren zur Hochzeit von Dieter eingeladen.

(2) Auf der Hochzeit von Hans waren Gabi und Erika zu Gast.

(3) Zu den Hochzeitsgästen von Peter gehörten Klaus und Simone.

Untersuche, ob für jeden der vier Männer der Name seiner Ehefrau allein aus den Aussagen (1) bis (3) eindeutig zu ermitteln ist; wenn dies der Fall ist, so gib die Namen der Ehepaare an!

Aufgabe 190722:

a) Beweise folgenden Satz!

Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung $\overline{CD} = \overline{AD}$ (1) gilt, dann gilt die folgende Aussage (2): Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\sphericalangle BAD$. (2)

b) Beweise auch die folgende Umkehrung!

Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

Aufgabe 190723:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1) bis (4) erfüllen!

(1) z ist eine dreistellige Zahl.

(2) Die Zehnerziffer (d.h. die an der Zehnerstelle stehende Ziffer) von z ist um 1 größer als die Hunderterziffer von z.

(3) Die Einerziffer von z ist doppelt so groß wie die Hunderterziffer von z.

(4) z ist das Doppelte einer Primzahl.

Aufgabe 190724:
Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B. Nach einer Fahrzeit von 20 Minuten hatte er eine Panne, die in 30 Minuten behoben werden konnte. Nach weiteren 12 Minuten Fahrzeit mußte er an einer geschlossenen Bahnschranke 4 Minuten warten. Bis dahin hatte er 40 km zurückgelegt.

Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11.06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen, stellt der Kraftfahrer fest, daß er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte derjenigen Zeit benötigt hat, die insgesamt von der Abfahrt von A bis zur Ankunft in B vergangen war.

Es sei angenommen, daß der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?

b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ausgedrückt?

c) Wieviel Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

19. Mathematik-Olympiade 1979/80
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190731:

Ermittle alle geordneten Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die zweite Zahl y ist um 1 kleiner als das Dreifache der ersten Zahl x.

(2) Das Produkt aus dem Sechsfachen der ersten und dem Vierfachen der zweiten Zahl beträgt 1680.

Aufgabe 190732:

Von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit dem gleichen Radius r, aber verschiedenen Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 werde vorausgesetzt:

k_2 und k_3 schneiden einander in einem Punkt P und einem Punkt $A \neq P$.

k_3 und k_1 schneiden einander in P und einem Punkt $B \neq P$.

k_1 und k_2 schneiden einander in P und einem Punkt $C \neq P$.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks ABC hat r als Radius!

Aufgabe 190733:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5,5$ cm, $c = 2,5$ cm, $e = 4,5$ cm, $f = 6,0$ cm! Dabei seien a bzw. c die Längen der Seiten AB bzw. CD; e bzw. f die Längen der Diagonalen AC bzw. BD.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 190734:

Birgit und Frank erhalten folgende Informationen über die Schüler einer Schulklasse:

Die Anzahl aller Schüler dieser Klasse ist kleiner als 40.
Genau 60% dieser Schüler nehmen an der AG "Bildende Kunst" teil,
genau 66% aller Schüler der Klasse gehen regelmäßig zum Schwimmen,
genau 50% aller Schüler der Klasse sind Leser der Kinderbibliothek.

Birgit nennt eine natürliche Zahl x und meint:

Aus den Informationen folgt, daß mindestens x Schüler dieser Klasse sowohl an der AG "Bildende Kunst" teilnehmen als auch regelmäßig zum Schwimmen gehen; dagegen folgt nicht, daß mehr als x Schüler der Klasse diese beiden Freizeitbeschäftigungen ausüben.

Frank nennt eine natürliche Zahl y und meint:

Aus den Informationen folgt, daß mindestens y Schüler dieser Klasse an allen drei Formen der Freizeitbeschäftigung (AG "Bildende Kunst", Schwimmen, Kinderbibliothek) teilnehmen.

a) Zeige, daß aus den gegebenen Informationen die Anzahl der Schüler der Klasse eindeutig ermittelt werden kann, und gib diese Anzahl an!

b) Ermittle eine natürliche Zahl x so, daß Birgits Aussagen wahr sind!

c) Beweise, daß Franks Aussagen für jede natürliche Zahl $y > 0$ falsch sind!

Aufgabe 190735:

Cathrin geht einkaufen. Sie hat genau 18 Geldstücke, und zwar nur Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke, bei sich. Von dem Gesamtbetrag dieses Geldes gibt sie genau die Hälfte aus. Nach dem Einkauf stellt sie fest, daß sie jetzt wieder ausschließlich Zweimark- und Fünfzigpfennigstücke bei sich hat, und zwar soviel Zweimarkstücke wie sie vor dem Einkauf Fünfzigpfennigstücke besaß, und soviel Fünfzigpfennigstücke, wie sie vorher Zweimarkstücke hatte.

Welchen Geldbetrag besaß Cathrin noch nach dem Einkauf?

Aufgabe 190736:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, daß die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind.

Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF!

20. Mathematik-Olympiade 1980/81
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200711:

Anläßlich der Siegerehrung eines Mathematikwettbewerbs beglückwünschte jeder Preisträger jeden anderen mit einem Händedruck. Insgesamt wurden dabei 91 Händedrücke ausgeführt, und zwar bei jedem der Glückwünsche genau einer.

Ermittle aus dieser Angabe die Anzahl der Preisträger des Wettbewerbs!

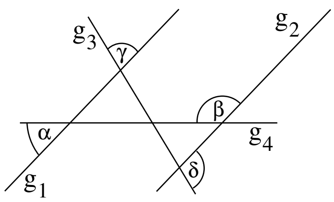
Aufgabe 200712:

Aus einem alten ägyptischen Rechenbuch (1700 v.u.Z.) stammt folgende Aufgabe:

Ein Wanderer stellt fest, daß ein Hirt 70 Schafe auf die Weide führt. Er fragt den Hirten: "Sind die Schafe, die du hier führst, deine sämtlichen Schafe?" - "Nein", antwortet der Hirt, "ich führe nur zwei Drittel von einem Drittel der gesamten Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide."

Ermittle die Stückzahl der gesamten Herde, die diesem Hirten anvertraut war!

Aufgabe 200713:



Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sich so schneiden, wie es aus dem Bild ersichtlich ist. Für die Größen α, β, γ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.

Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße δ!

Aufgabe 200714:

Beweise folgenden Satz:

Ist M der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC und gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

20. Mathematik-Olympiade 1980/81
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200721:

Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:

(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.

(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.

Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

Aufgabe 200722:

Von einem Dreieck wird gefordert: Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.

a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!

b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!

c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

Aufgabe 200723:

Jens sagt: "Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfache (k.g.V.) beträgt 51 975, ihr größter gemeinsamer Teiler (g.g.T.) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4 725."

Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

Aufgabe 200724:

a) Beweise den folgenden Satz:

Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.

b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$.

20. Mathematik-Olympiade 1980/81
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200731:

Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, daß sie sich in vier Summanden zerlegen läßt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt ein vier Fünftel es zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.

Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!

Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 200732:

Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.

b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlänge ein Dreieck konstruiert werden kann!

c) Berechne, wieviel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind! (Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

Aufgabe 200733:

Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, daß auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und daß auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt:

Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist

$$\overline{SC} = \overline{CA} = \overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE} \text{ und}$$
$$\overline{SB} = \overline{SE}.$$

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BSE$!

Aufgabe 200734:

Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund: "In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr."

Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

Aufgabe 200735:

Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, daß sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.

Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

Aufgabe 200736:

In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe "Mathematische Schülerbücherei". Außerdem ergab sich aus Gesprächen, daß genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.

Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

21. Mathematik-Olympiade 1981/82
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210711:

Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden. Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.

a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!

b) Wieviel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

Aufgabe 210712:

Andreas sagt zu seinem Freund:

> "Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen! Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast."

Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

Aufgabe 210713:

Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen.

Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:

(1) Es ist wahr, daß Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.

(2) Es ist falsch, daß Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.

(3) Es ist nicht wahr, daß keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.

(4) Es ist wahr, daß Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.

(5) Es ist unwahr, daß Frauke größer als Christine ist.

(6) Es ist nicht falsch, daß Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und daß Christine größer als Eva ist.

Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!

Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

Aufgabe 210714:
In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet.

Beweise, daß diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!

Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

21. Mathematik-Olympiade 1981/82
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210721:

a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m. Der Weg ist 3 m breit.

   Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!

b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.

   Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!

c) Ermittle, wieviel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchhang und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, daß der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird. (Es ist auf volle Meter zu runden.)

Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aufgabe 210722:

Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt P. Von P sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße Q.

Beweise, daß Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke SP liegt!

Aufgabe 210723:

Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7 875 ist!

Aufgabe 210724:

Albrecht Dürer bringt auf seinem Stich "Melancholie" ein "magisches Quadrat" aus den Zahlen 1 bis 16, d.h. ein Quadrat, in dem jede Zeile, jede Spalte und jede Diagonale denselben Summenwert hat.

16	3	2	13
			8
9			12
4			

In den beiden Mittelfeldern der untersten Zeile ist das Entstehungsjahr des Stiches abzulesen.

In der Abbildung ist dieses Quadrat mit unvollständiger Eintragung wiedergegeben.

Begründe, wie das magische Quadrat auszufüllen ist, und gib das Entstehungsjahr an!

21. Mathematik-Olympiade 1981/82
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210731:

In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel:	"An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate."
Beate:	"An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate."
Christa:	"An der Tafel ist genau ein Parallelogramm."
Detlev:	"An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke."

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

a) Von wem kam die falsche Aussage?

b) Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!

c) Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

Aufgabe 210732:

Ermittle alle Paare $(x; y)$ rationaler Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Summe $x + y$ dieselbe Zahl wie das Produkt $x \cdot y$ und auch dieselbe Zahl wie der Quotient $x : y$ ist!

Aufgabe 210733:

Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3,1$ cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = 120°$! Dabei bezeichne a die Länge $\overline{AB} = \overline{BC}$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 210734:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Auf k liegen die Punkte A und B derart, daß der Winkel $\sphericalangle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) C liegt auf k.

(2) Es gilt $\overline{MB} = \overline{BC}$.

(3) Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D.

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\sphericalangle CDB$!

Aufgabe 210735:

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

Aufgabe 210736:

Eine Flüssigkeit wird in kleinen, mittleren und großen Flaschen verkauft. In jede kleine Flasche passen genau 200 g, in jede mittlere genau 500 g und in jede große genau 1 000 g der Flüssigkeit. Jede gefüllte 200 g-Flasche kostet 1, 20 M, jede gefüllte 500 g-Flasche kostet 2, 80 M.

Der Preis der leeren 500 g-Flasche ist um 50% höher als der der leeren 200 g-Flasche. Die leere 1 000 g-Flasche wiederum ist um 50% teurer als die leere 500 g-Flasche.

Welcher Betrag wird eingespart, wenn anstelle von fünf gefüllten 200 g-Flaschen eine gefüllte 1 000 g-Flasche gekauft wird?

22. Mathematik-Olympiade 1982/83
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220711:

Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,

b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,

c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45°$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, daß sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!

Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

Aufgabe 220712:

Die (untereinander nicht verwandten) Ehepaare Meier und Schmidt machen gemeinsam mit ihren Kindern eine kurze Urlaubsfahrt und nehmen dazu einen größeren Vorrat an Papierservietten mit. Jeder Teilnehmer erhält zu jeder Mahlzeit eine Serviette. Von jedem Teilnehmer wurde dieselbe Anzahl Mahlzeiten eingenommen, und zwar mehr als eine. - Nach Abschluß der Fahrt stellte man fest, daß genau 121 Servietten verbraucht wurden.

Wieviel Kinder dieser Familie nahmen insgesamt an der Reise teil?

Aufgabe 220713:

Zwei landwirtschaftliche Produktionsgenossenschaften (LPG) A und B wollen einen Entwässerungsgraben von $2,4$ km Länge säubern. Der LPG A gehören davon $1,5$ km, die LPG B besitzt die übrigen $0,9$ km. Damit diese wichtige Arbeit in kurzer Zeit geschafft wird, hilft auch die LPG C mit. Die drei LPG führen die Säuberungsarbeiten so durch, daß jede einen gleichlangen Grabenabschnitt übernimmt.

Danach ist an die LPG C für die von ihren Mitgliedern geleistete Arbeit ein Betrag von insgesamt 240 M durch die LPG A und B zu zahlen. Jede dieser beiden LPG zahlt davon soviel, wie es der Länge des Grabenstücks entspricht, dessen Reinigung die LPG C für sie übernommen hat.

Berechne die beiden von den LPG A und B gezahlten Beträge!

Aufgabe 220714:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

22. Mathematik-Olympiade 1982/83
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220721:
Ermittle alle geraden natürlichen Zahlen z mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig, keine ihrer fünf Ziffern ist eine 0.

(2) Die aus den ersten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(3) Die aus den letzten drei Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete dreistellige Zahl ist eine Kubikzahl.

Hinweis: Ist a eine natürliche Zahl, so heißt a^2 ihre Quadratzahl und a^3 ihre Kubikzahl.

Aufgabe 220722:
In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$

(2) Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: "Dann muß das Dreieck ABC rechtwinklig sein." Vera behauptet: "Nein, dann muß es gleichseitig sein." Werner behauptet: "Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein."

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 220723:
Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, daß $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muß!

Aufgabe 220724:
Für drei natürliche Zahlen a, b, c werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Es gilt $a < b < c$.

(2) Wenn a, b, c die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Kantenlängen eines Quaders sind, so hat der Quader das Volumen $270\ \text{cm}^3$, und die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 80 cm.

Untersuche, ob es natürliche Zahlen gibt, die diese Forderungen erfüllen, und ob diese Zahlen durch die Forderungen (1) und (2) eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so nenne diese Zahlen!

22. Mathematik-Olympiade 1982/83
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220731:

Die Konsumgenossenschaft erstattet in jedem Jahr 1,6% desjenigen Betrages zurück, für den Konsummarken abgerechnet wurden. Von vier Familien A, B, C und D ist aus einem Jahr bekannt:

A hatte für einen doppelt so großen Betrag abgerechnet wie B oder, was dasselbe war, für einen dreimal so großen wie C bzw. für einen viermal so großen wie D; die vier Familien A, B, C, D erhielten zusammen 336 DM zurückerstattet.

Für jede der vier Familien A, B, C, D soll aus diesen Angaben ermittelt werden:

a) Für welchen Betrag hatte diese Familie in diesem Jahr Konsummarken abgerechnet?

b) Welchen Betrag erhielt daher diese Familie zurückerstattet?

Aufgabe 220732:

Petra schreibt nacheinander sechs natürliche Zahlen auf. Die erste Zahl wählt sie beliebig, jede weitere genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorangehenden Zahl. Sie stellt fest, daß die Summe der sechs aufgeschriebenen Zahlen durch 21 teilbar ist.

a) Bilde ein Beispiel, und bestätige in diesem Beispiel Petras Feststellung!

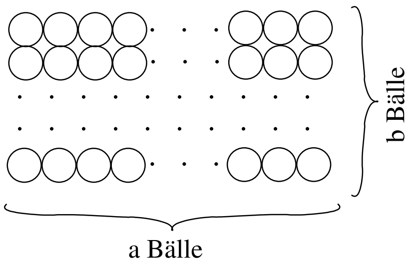
b) Beweise, daß bei jeder beliebigen Wahl der ersten Zahl die beschriebene Rechnung zu einer Summe führt, die durch 21 teilbar ist!

Aufgabe 220733:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5,0$ cm, $b = 3,5$ cm, $c = 2,5$ cm und $h = 3,0$ cm! Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 220734:



Im Schaufenster eines Sportgeschäftes befindet sich ein Stapel aus 550 gleichgroßen Bällen. Der Stapel besteht aus waagerechten Schichten. Jede Schicht enthält Bälle in einer rechteckigen Anordnung, wie sie die Abbildung zeigt. Die Anzahlen a und b sind in jeder Schicht genau um 1 kleiner als die entsprechenden Anzahlen in der darunterliegenden Schicht. In der untersten Schicht ist 10 die kleinere der beiden Anzahlen a, b. In der obersten Schicht ist 1 die kleinere der beiden Anzahlen a, b.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Bälle in der untersten Schicht!

Aufgabe 220735:

Beweise folgenden Satz!

Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

Aufgabe 220736:

Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

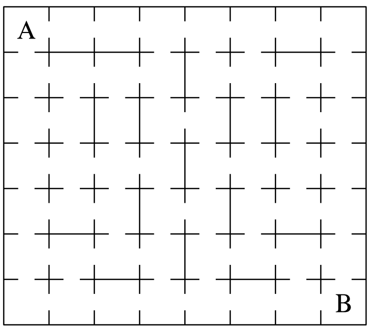
M ist der Mittelpunkt der Stecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CMD$ sind einander gleich groß.

Zeige, daß durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

23. Mathematik-Olympiade 1983/84
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230711:



Der Weg von A nach B soll durch alle 56 Felder der untenstehenden Figur führen. Dabei soll jedes Feld nur einmal betreten und jede "Tür" höchstens einmal benutzt werden.

Gib einen solchen Weg an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 230712:

Ein Kraftwagen fährt auf einer Autobahn mit einer konstanten Geschwindigkeit von $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein zweiter Kraftwagen befindet sich 2 km hinter dem ersten und fährt in derselben Richtung mit einer konstanten Geschwindigkeit von $85\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Wieviel Minuten benötigt der zweite Kraftwagen, bis er den ersten einholt?

b) Wieviel Kilometer legt der zweite Kraftwagen zurück, bis er den ersten einholt?

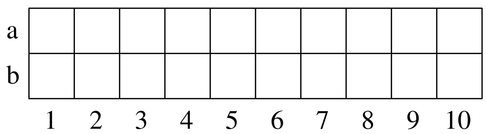
Aufgabe 230713:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\sphericalangle ASB$ habe die Größe 120°.

Ermittle die Diagonalenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in Abhängigkeit von der Seitenlänge $\overline{BC}$!

Aufgabe 230714:

Zwei Spieler A und B spielen auf einem "2 x 10 - Brett" folgendes Spiel:



Zu Beginn lost A in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus und besetzt es jeweils mit einem weißen Stein. Danach lost B ebenfalls in jeder der Zeilen a und b ein Feld aus, das aber stets rechts von dem von A ausgelosten Feld liegen muß, und besetzt es jeweils mit einem schwarzen Stein. Beispielsweise ist "Weiß: $a9$, $b2$; Schwarz: $a10$, $b7$ (Abbildung unten), eine mögliche Anfangsstellung.

a									○	●
b		○					●			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Nun ziehen A und B abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muß (genau) einen seiner beiden Steine in dessen Zeile um mindestens ein Feld, jedoch höchstens bis zum Spielfeldrand bzw. bis zum Feld unmittelbar neben dem gegnerischen Stein beliebig nach links oder nach rechte ziehen. Sieger ist, wer die Steine des Gegners so blockiert, daß dieser nicht mehr ziehen kann.

a) Gib für folgende Anfangsstellungen an, wie A ziehen und dann auf jede Zugmöglichkeit von B so antworten kann, daß er mit Sicherheit siegt:

(1) Weiß: $a9$, $b2$; Schwarz: $a10$, $b7$.

(2) Weiß: $a3$, $b5$; Schwarz: $a8$, $b6$.

(3) Weiß: $a8$, $b4$; Schwarz: $a10$, $b7$.

(4) Weiß: $a4$, $b2$; Schwarz: $a8$, $b9$.

b) Entscheide, ob A von den folgenden Anfangsstellungen aus den Sieg erzwingen kann:

(5) Weiß: $a2$, $b4$; Schwarz: $a7$, $b9$.

(6) Weiß: $a6$, $b2$; Schwarz: $a8$, $b5$.

(7) Weiß: $a5$, $b3$; Schwarz: $a8$, $b6$.

c) An welchen Merkmalen einer Anfangsstellung kann man stets erkennen, ob A den Sieg erzwingen kann?

23. Mathematik-Olympiade 1983/84
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230721:

Uwes Schulweg führt am Rathaus und am Bahnhof vorbei. Am Rathaus hat Uwe ein Viertel des Weges geschafft; die Rathausuhr zeigt 7.30 Uhr an. Am Bahnhof hat Uwe ein Drittel des Weges hinter sich; die Bahnhofsuhr zeigt 7.32 Uhr an.

Um wieviel Uhr trifft Uwe in der Schule ein, wenn er während den gesamten Weges mit gleichbleibender Geschwindigkeit geht?

Aufgabe 230722:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.

Beweise, daß dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

Aufgabe 230723:

Blaue, gelbe und rote Würfel sollen in eine Reihe gelegt werden. Der erste Würfel der Reihe soll blau, der zweite soll gelb sein. In der Reihe sollen niemals zwei gleichfarbige Würfel nebeneinander liegen, und es soll sich auch die Farbfolge von zwei nebeneinanderliegenden Würfeln niemals wiederholen.

Ermittle die größtmögliche Anzahl der Würfel in einer Reihe, die alle diese Bedingungen erfüllt!

Gib mindestens ein Beispiel für eine solche Reihe mit der größtmöglichen Anzahl von Würfeln an und weise nach, daß es keine solche Reihe mit mehr Würfeln geben kann!

Aufgabe 230724:

Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

23. Mathematik-Olympiade 1983/84
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230731:

Fünf Mädchen, die alle älter als 10 Jahre sind und am gleichen Tag Geburtstag haben, von denen aber keine zwei gleichaltrig sind, werden an ihrem Geburtstag nach ihrem Alter gefragt. Jedes Mädchen antwortet wahrheitsgemäß:

(1) Anja: "Ich bin 5 Jahre jünger als Elke."

(2) Birgit: "Ich bin jünger als Carmen, aber älter als Dorit."

(3) Carmen: "Ich bin 14 Jahre alt."

(4) Dorit: "Ich bin weder das jüngste noch das älteste von uns fünf Mädchen."

(5) Elke: "Birgit und Carmen sind beide jünger als ich."

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wie alt jedes dieser Mädchen ist! Ist dies der Fall, dann gib für jedes der Mädchen das Alter an!

Aufgabe 230732:

Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle CDA$ die Größen 2α, 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

Aufgabe 230733:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4,5$ cm und $s_c = 5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.

Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her! Beweise, daß ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

Aufgabe 230734:

Von einer Zahl wird folgendes gefordert:

> Wenn man die Zahl halbiert,
> vom Ergebnis dann 1 subtrahiert,
> vom dabei erhaltenen Ergebnis ein Drittel bildet,
> von diesem Drittel wieder 1 subtrahiert,
> vom nun entstandenen Ergebnis ein Viertel bildet und von diesem Viertel nochmals 1 subtrahiert,
> so erhält man 1.

Gib jede Zahl an, die diese Forderung erfüllt! Beweise dazu, daß jede Zahl, die die Forderung erfüllt, von dir angegeben wurde und daß jede von dir angegebene Zahl die Forderung erfüllt!

Aufgabe 230735:

Roland rechnet eine Divisionsaufgabe. Er stellt fest: Der Dividend beträgt 60% des Quotienten, der Divisor beträgt 75% des Quotienten.

Beweise, daß man aus Rolands Feststellungen eindeutig ermitteln kann, wie der Quotient der Divisionsaufgabe lautet! Gib diesen Quotienten an!

Aufgabe 230736:

Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt:

> Der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ ist größer als 90°.
> Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot \overline{BD} = \overline{AB} = \overline{BC}$.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

24. Mathematik-Olympiade 1984/85
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240711:

Über die Jungen einer Schulklasse ist folgendes bekannt:

Jeder Junge dieser Klasse gehört mindestens einer der drei Arbeitsgemeinschaften "Foto", "Junge Mathematiker", "Turnen" an. Ferner gelten folgende Aussagen:

(1) Genau sechs Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Foto".

(2) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Junge Mathematiker".

(3) Genau fünf Jungen der Klasse sind Mitglieder der AG "Turnen".

Weiterhin gelten über die Jungen dieser Klasse auch die folgenden Aussagen:

(4) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Junge Mathematiker".

(5) Genau ein Junge gehört sowohl zur AG "Foto" als auch zur AG "Turnen".

(6) Genau drei der Jungen gehören sowohl zur AG "Junge Mathematiker" als auch zur AG "Turnen".

Schließlich gilt auch die Aussage

(7) Genau einer der Jungen dieser Klasse nimmt an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

(Dagegen ist zu beachten, daß in (1) bis (6) nichts darüber ausgesagt wird, ob die betreffenden Jungen außer den jeweils genannten Arbeitsgemeinschaften noch weiteren Arbeitsgemeinschaften angehören.)

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahl aller Jungen dieser Klasse eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl an!

Aufgabe 240712:

Peter und Klaus würfeln mit drei Würfeln. Sie notieren nach jedem Wurf die drei erhaltenen Augenzahlen a, b, c in der Darstellung (a, b, c), wobei sie diese drei Zahlen so angeordnet haben, daß $a \geq b \geq c$ gilt. Sie bezeichnen zwei Würfe genau dann als voneinander "verschieden", wenn bei dieser Schreibweise mindestens ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen auftritt.

(1) Welches ist die kleinste Summe und welches ist die größte Summe der drei Augenzahlen, die bei einem Wurf auftreten kann?

(2) Beim Spiel fragt Peter: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen als Summe der Augenzahlen der Wert 12 auftritt?" Beantworte diese Frage!

(3) Klaus überlegt: "Wieviel verschiedene Würfe gibt es insgesamt, bei denen wenigstens einer der Würfel die Augenzahl 6 aufweist?" Ermittle auch diese Anzahl!

(4) Nach genau 50 Würfen beenden die beiden Schüler ihr Würfelspiel. Sie fragen sich, ob dabei alle möglichen verschiedenen Würfe vorgekommen sein können. Beantworte diese Frage und beweise deine Antwort!

Aufgabe 240713:

In einem Ferienlager wird ein Tischtennisturnier geplant, das folgendermaßen ablaufen soll:

Die 36 Teilnehmer tragen zunächst Vorrundenspiele in sechs Gruppen zu je sechs Spielern aus, und zwar spielt von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden genau einmal. Die jeweils beiden Erstplazierten einer jeden Gruppe gelangen in die Zwischenrunde. Diese 12 Teilnehmer der Zwischenrunde werden neu in zwei Gruppen zu ja sechs Spielern eingeteilt, und dann spielt in der Zwischenrunde wieder von solchen sechs Spielern jeder gegen jeden. Die jeweils beiden Erstplazierten jeder dieser zwei Gruppen gelangen in die Endrunde. Diese vier Teilnehmer der Endrunde ermitteln durch Spiele jeder gegen jeden die Medaillengewinner.

Das Turnier soll um 8.30 Uhr beginnen. Zwischen Vor- und Zwischenrunde soll ein Pause von einer Stunde eingeplant werden; nach Abschluß der Zwischenrunde wird nochmals eine Pause von 15 Minuten eingeplant, und zwischen dem Abschluß der Endrunde und der Siegerehrung ist wiederum eine Pause von 15 Minuten vorgesehen.

Wann kann man unter diesen Bedingungen die Siegerehrung frühestens ansetzen, wenn für jedes Spiel (einschließlich der notwendigen Spielerwechsel) 15 Minuten geplant werden und wenn genau sechs Tischtennisplatten zur Verfügung stehen?

Zeige durch eine Aufstellung der Spiele, die jeweils gleichzeitig stattfinden sollen, daß der von dir angegebene Zeitpunkt der Siegerehrung eingehalten werden kann.

Aufgabe 240714:

(a) Über die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks wird vorausgesetzt:

  (1) Diese Maßzahlen sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

  (2) Der Umfang des Dreiecks ist um 25 cm länger als die kürzeste Dreiecksseite. Ermittle aus diesen Voraussetzungen die drei Seitenlängen!

(b) Löse die Aufgabe, wenn die Voraussetzung (2) durch die folgende Voraussetzung (2') ersetzt wird!

  (2') Es sei n eine vorgegebene natürliche Zahl. Der Umfang des Dreiecks ist um n Zentimeter länger als die kürzeste Dreiecksseite. Die gesuchten drei Seitenlängen sind mit Hilfe von n ausgedrückt anzugeben.

(c) Untersuche, welche natürlichen Zahlen n in (2') vorzugeben sind, damit in (b) eine lösbare Aufgabe entsteht!

24. Mathematik-Olympiade 1984/85
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240721:

Drei Ehepaare sitzen zum Romméspiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:

(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.

(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.

(3) Anton sitzt neben seiner Frau.

(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Aufgabe 240722:

Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!

b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:

   Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m. Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.

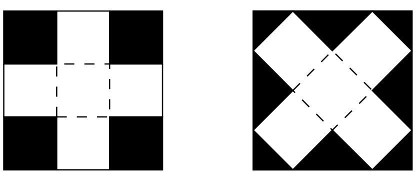
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

Aufgabe 240723:

Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CBA$ auf der Seite CD liegt.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

Aufgabe 240724:



Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt. Beide Netze sind so angeordnet, daß die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.

Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

24. Mathematik-Olympiade 1984/85
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240731:

Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation:

Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer. Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfaßte genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln läßt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wieviel Fahrern sie dort vertreten waren! Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 240732:

a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

   (1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.

   (2) x hat die Quersumme 29.

   (3) x ist durch 11 teilbar.

   Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

   (4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

   Ermittle das größte Element der Menge M'!

Aufgabe 240733:

Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

Die Seite AB hat die Länge $c = 5\,\text{cm}$, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4,5\,\text{cm}$, der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.

Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 240734:

Beweise folgenden Satz!

Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt $a : b = h_b : h_a$.

Aufgabe 240735:

In dem Schema 4 3 □ 1 □ 5 □ ist jede der Leerstellen □ so mit einer Ziffer auszufüllen, daß die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.

Gib an, wieviel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

Aufgabe 240736:

Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,

(2) $\overline{AD} = \overline{BC} = 3 \cdot \overline{DC} = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,

(3) $\sphericalangle BAD = 60°$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

25. Mathematik-Olympiade 1985/86
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250711:

In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50 g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.

Zeige, daß das mit nur drei Wägungen möglich ist!

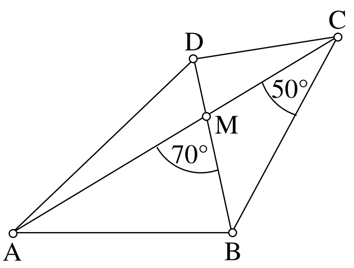
Aufgabe 250712:

Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.

(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Aufgabe 250713:



Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Abbildung).

Es soll $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\sphericalangle BMA$ die Größe 70°und der Winkel $\sphericalangle BCM$ die Größe 50°haben.

Gerd behauptet, daß durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\sphericalangle DAM$ eindeutig bestimmt ist. Uwe vertritt die Meinung, daß es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\sphericalangle DAM$ aufweisen.

Wer hat recht?

Aufgabe 250714:

Von einem Rechteck ist bekannt:

(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.

(2) Wenn man jede Seite des Rechtecke um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm^2 größer.

Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

25. Mathematik-Olympiade 1985/86
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250721:

Annett, Birgit und Cornelia haben in der letzten Klassenarbeit unterschiedliche Leistungen gezeigt; denn eine dieser Schülerinnen erhielt die Note 1, eine andere die Note 2 und die dritte die Note 3.

Kerstin, eine Klassenkameradin, erzählt zu Hause: ”Annett hat keine 1, Birgit keine 2, aber Cornelia hat eine 2.”

Es stellt sich jedoch heraus, daß sich Kerstin bei genau zwei dieser drei Aussagen geirrt hatte.

Kann man aus diesen Angaben die Noten der einzelnen Schülerinnen eindeutig ermitteln? Ist dies der Fall, so gib die Notenverteilung an!

Aufgabe 250722:

Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0,216\,\text{dm}^3$, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.

Von einem zweiten Quader sei bekannt, daß er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und daß die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders.

Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

Aufgabe 250723:

Es sei ABC ein Dreieck mit $\sphericalangle BAC = \alpha > 90°$.

Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets$\sphericalangle BHC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB$ gilt!

Aufgabe 250724:

a) Gegeben seien die drei Ziffern 2, 7 und 9. Aus ihnen sollen alle diejenigen dreistelligen Zahlen gebildet werden, die jede dieser drei Ziffern genau einmal enthalten.

   Zeige, daß die Summe aus allen diesen dreistelligen Zahlen durch 111 teilbar ist!

b) Gegeben sind drei paarweise verschiedene Ziffern, von denen keine die Ziffer 0 ist.

   Beweise, daß die Summe aus allen denjenigen dreistelligen Zahlen, die jede dieser Ziffern genau einmal enthalten, stets durch 111 teilbar ist!

25. Mathematik-Olympiade 1985/86
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250731:

Ermittle zu jeder natürlichen Zahl $n > 0$ die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die Teiler der Zahl 2^n sind!

Aufgabe 250732:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{CA} = 4$ cm, $\overline{CB} = 20$ cm. Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, daß sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d.h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $\overline{CB'} = \overline{CB} - x$ cm.

b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Aufgabe 250733:

Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

(2) Die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.

(3) Es gilt $\overline{AE} = 6,0$ cm und $\overline{BE} = 4,0$ cm.

a) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

Aufgabe 250734:

Ein Jagdflugzeug flog in einer halben Stunde 200 km weiter als ein Sportflugzeug in einer Stunde.

Wie groß war die Geschwindigkeit jedes dieser beiden Flugzeuge, wenn die des Jagdflugzeuges dreimal so groß war wie die des Sportflugzeugs?

Aufgabe 250735:

In einer Arbeitsgemeinschaft stellt Rainer seinen Klassenkameraden folgendermaßen eine Aufgabe:

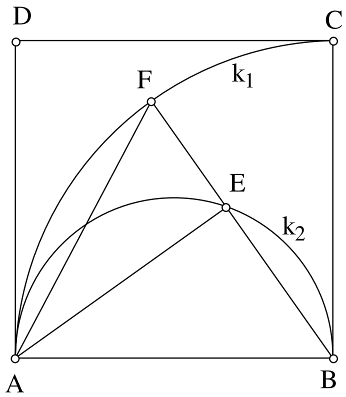
Er nimmt drei Karten, auf denen zweiziffrige Zahlen stehen, so in die Hand, daß niemand anders als er die Zahlen sehen kann und daß sich die dreimal zwei Ziffern nebeneinandergehalten als eine sechsstellige Zahl lesen lassen. Dies macht er (mit denselben Karten) mehrere Male, bis er jede mögliche Reihenfolge der drei Karten genau einmal berücksichtigt hat. Die abgelesene sechsstellige Zahl notiert er jedesmal (ebenfalls so, daß nur er seine Notizen sehen kann). Anschließend bildet er die Summe aller notierten Zahlen.

Nun teilt er den Klassenkameraden mit:

"Auf einer Karte steht die Zahl 15, auf einer die Zahl 23. Auf der dritten Karte steht eine zweistellige Zahl, die ich nicht verrate. Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 1 373 736."

Untersuche, ob es genau eine zweistellige Zahl gibt, die unter den genannten Bedingungen nach Rainers Aussagen auf der dritten Karte stehen kann! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese zweistellige Zahl!

Aufgabe 250736:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$ sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2. Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle EAF}$ folgt!

26. Mathematik-Olympiade 1986/87
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260711:

Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die die angegebene Forderung erfüllen!

a) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.

b) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen läßt.

c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.

d) Die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.

e) Die Summe $\left(\frac{7}{12} + \frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

Aufgabe 260712:

In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Mißgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen. Da zu jedem Vorhängeschloß von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer paßt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muß herausgefunden worden, welcher Schlüssel zu welchem Schloß gehört.

Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betreut wurde, dachte: "Jetzt muß ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muß also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen." Sein Freund Uwe meinte jedoch, daß man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d.h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloß den passenden Schlüssel findet!

Aufgabe 260713:

Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt worden. Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, daß jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.

Wieviel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

Aufgabe 260714:

Ein *Junger Mathematiker* zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, daß die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.

Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

26. Mathematik-Olympiade 1986/87
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260721:

Anne, Bernd und Peter helfen im Garten bei der Apfelernte. Alle drei benutzen Körbe gleicher Größe. Anne benötigt 10 Minuten, um einen Korb zu füllen, Bernd braucht dafür 15 Minuten und der kleine Peter sogar 30 Minuten.

Wie lange würde es dauern, bis die drei Kinder gemeinsam einen Korb gefüllt hätten? Wir setzen voraus, daß sich für keinen der drei Helfer die Pflückgeschwindigkeit ändert.

Aufgabe 260722:

Klaus lernte im Mathematik-Spezialistenlager Dorit kennen und fragte sie nach ihrem Alter. Sie antwortete: "Ich wurde im Mai desjenigen Jahres 10 Jahre alt, dessen Jahreszahl die kleinste durch 7 teilbare Zahl ist, die bei Division durch 2, 3, 5 und 11 jeweils den Rest 1 läßt."

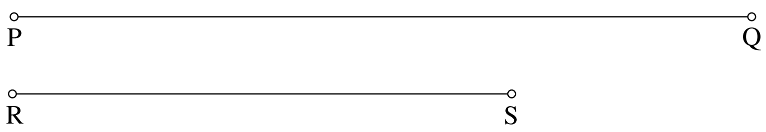
Untersuche, ob Klaus aus dieser Antwort Dorits Alter eindeutig ermitteln konnte. Ist dies der Fall, dann gib an, wie alt (in vollen Lebensjahren gerechnet) Dorit im Juni 1986 ist!

Aufgabe 260723:

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.

Beweise, daß das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

Aufgabe 260724:



Zu zwei gegebenen Streckenlängen $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ (siehe Abbildung) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

(1) $\overline{PQ} = 2a + b$,

(2) $\overline{RS} = 2a - b$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.

Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:

(a) Übertrage $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ auf ein Zeichenblatt und *konstruiere* (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion! Begründe, warum die Aufgabe (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

(b) Ermittle a und b *rechnerisch*, wenn die gegebenen Längen $\overline{PQ} = 9,8$ cm und $\overline{RS} = 6,6$ cm betragen!

26. Mathematik-Olympiade 1986/87
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260731:

Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ an einer Tankstelle (A) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km mußte Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen. Da die nächste Tankstelle (B) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf 60 $\frac{km}{h}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen A und B zurück?

(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ auf 60 $\frac{km}{h}$ herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflußt.)

Aufgabe 260732:

Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:

> Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
>
> Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
>
> Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
>
> Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben! Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 260733:

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.

Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!

Aufgabe 260734:

Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!

(1) m und n sind dreistellige Zahlen.

(2) Es gilt $m - n = 889$.

(3) Für die Quersumme $Q(m)$ und $Q(n)$ von m und n gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

Aufgabe 260735:

Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben? Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 260736:

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.

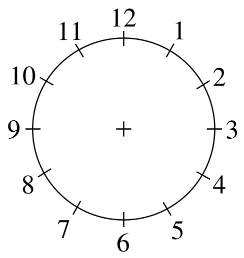
a) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle ESA$ kein rechter Winkel ist!

b) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle DSE$ ein rechter Winkel ist!

27. Mathematik-Olympiade 1987/88
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270711:



Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt in drei Flächenstücke. Nachdem der erste Schreck über das Mißgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, daß keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen. Dabei stellte er fest, daß sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.

Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein? Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, daß die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

Aufgabe 270712:

In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß sie schwarz oder weiß sind und daß mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinender unterscheiden.

Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, daß man mit Sicherheit vorhersagen kann:

a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.

b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.

c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

Aufgabe 270713:

In einen Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.

Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

Aufgabe 270714:

Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.

a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!

b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!

c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Läßt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

27. Mathematik-Olympiade 1987/88
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270721:

Jörg unternahm in den Ferien mit seinem Fahrrad eine Dreitagewanderung. Er legte dabei am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge der für alle drei Tage geplanten Wanderstrecke zurück. Am zweiten Tag war Jörg 24 km weniger gefahren als am ersten Tag.

Ermittle die Länge der Wegstrecke, die Jörg noch für den dritten Tag verblieb!

Aufgabe 270722:

Angela, Bodo, Constanze und Dietmar sprechen über den Ausgang zweier Fußballspiele der Klasse 7a gegen die Klasse 7b. Zu beiden Spielen machen sie dieselben Aussagen, nämlich:

Angela:	Das Spiel endete unentschieden.
Bodo:	Die Klasse 7a gewann.
Constanze:	Bodos Aussage ist falsch.
Dietmar:	Angelas Aussage ist wahr.

(a) Petra, die das erste Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das erste Spiel genau eine der vier Aussagen falsch ist.

(b) Rolf, der das zweite Spiel gesehen hat, stellt wahrheitsgemäß fest, daß für das zweite Spiel genau eine der vier Aussagen wahr ist.

Untersuche, ob sich (a) aus Petras Feststellung, (b) aus Rolfs Feststellung der Ausgang des betreffenden Spiels (Sieg der 7a, Sieg der 7b oder Unentschieden) eindeutig ermitteln läßt!

Aufgabe 270723:

Die Maßzahlen zweier Seitenlängen eines Dreiecks seien $a = 12$ und $b = 8$.

Ermittle alle diejenigen Zahlen, die als Maßzahl c der dritten Dreiecksseite so vorkommen können, daß die Maßzahl des Umfangs eine Primzahl ist. Alle drei Seitenlängen sollen dabei in derselben Maßeinheit, etwa in Zentimetern, gemessen sein.

Aufgabe 270724:

Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, daß der Winkel $\sphericalangle BMC$

(a) die Größe 42°,

(b) eine beliebig vorgegebene Größe ρ mit $0° < \rho < 180°$ hat.

Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ und die des Winkels $\sphericalangle ACB$!

27. Mathematik-Olympiade 1987/88
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270731:

Vier Mannschaften, A, B, C und D, trugen ein Fußballturnier aus. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere Mannschaft. Jedes gewonnene Spiel wurde mit 2 Punkten für die Siegermannschaft und mit 0 Punkten für die Verlierermannschaft gewertet, jedes unentschiedene Spiel für beide Mannschaften mit je 1 Punkt. Weiterhin ist folgendes bekannt:

(1) Keine Mannschaft blieb ohne Punkte.

(2) Mannschaft A konnte ihren Turniersieg aus dem vorigen Jahr nicht wiederholen, erreichte aber eine höhere Gesamtpunktzahl als Mannschaft B.

(3) Mannschaft C gewann kein Spiel, erreichte jedoch eine geradzahlige Gesamtpunktzahl.

(4) Mannschaft D spielte in keinem ihrer Spiele unentschieden und gewann gegen B sowie gegen den Turniersieger des vorigen Jahres.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, welche Punktzahlen jedes Spiel des Turniers den einzelnen Mannschaften erbrachte und welche Gesamtpunktzahlen sie erreichten!

Ist das der Fall, so trage die Punktzahlen in die folgende Tabelle ein!

Mannschaft	Erreichte Punktzahl gegen				Erreichte Gesamtpunktzahl
	A	B	C	D	
A	-				
B		-			
C			-		
D				-	

Aufgabe 270732:

In einem Betrieb werden Erzeugnisse hergestellt, bei denen die Herstellungskosten für jedes Stück 19,20 M betragen. Der Betrieb hat die Möglichkeit, für 13 500 M eine neue Werkzeugmaschine anzuschaffen; mit dieser Maschine würden die Herstellungskosten für jedes Stück nur noch 13,15 M betragen.

Ein Planziel lautet: Die Summe aus den Anschaffungskosten der neuen Maschine und aus den Herstellungskosten der damit in 3 Jahren hergestellten Erzeugnisse soll weniger als 80% derjenigen Herstellungskosten betragen, die (für ebensoviele Erzeugnisse) ohne Nutzung der neuen Maschine entstehen würden.

Ermittle die kleinste Stückzahl pro Jahr, mit der dieses Planziel zu erreichen ist!

Aufgabe 270733:
Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\sphericalangle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\sphericalangle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.

(2) Der Winkel $\sphericalangle APB$ hat die Größe 2γ

a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, daß sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und daß die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!

b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.

c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

Aufgabe 270734:
Ermittle alle diejenigen geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen x, y, für die

$$x^2 + xy + y^2 = 49$$

gilt!

Aufgabe 270735:
In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ bzw. $\sphericalangle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Vorausgesetzt werde nun, daß der Winkel $\sphericalangle BSD$ die Größe 4α hat.

Weise nach, daß durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

Aufgabe 270736:
In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.

Beweise, daß für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:

Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!

28. Mathematik-Olympiade 1988/89
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280711:

Ein Spiel für zwei Mitspieler hat folgende Regel:

Einer der beiden nennt eine beliebige einstellige Zahl. Der andere nennt eine größere natürliche Zahl, die jedoch höchstens um 10 größer sein darf als die vorhergenannte. So wechselt man ab. Gewonnen hat derjenige, der unter Beachtung der Spielregeln die Zahl 100 nennen kann.

a) Gibt es für den beginnenden Spieler eine Möglichkeit, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

b) Gibt es aber auch einen Spielbeginn, der anschließend dem zweiten Spieler eine Möglichkeit gibt, das Spiel in jedem Fall zu gewinnen?

Aufgabe 280712:

Aus den Ziffern 1, 3, 4, 5, 7 und 9 sollen sechsstellige natürliche Zahlen gebildet werden, in denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt.

a) Ermittle die Anzahl aller verschiedenen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können.

b) Untersuche, welche von den auf diese Weise gebildeten Zahlen durch 18 teilbar sind!

Aufgabe 280713:

a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\sphericalangle DAB$ ein spitzer Winkel ist! Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!

b) Beweise, daß in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F $\Delta AED \simeq \Delta CFB$ gilt!

Aufgabe 280714:

Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt wird, daß eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, daß der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt.

Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:

Achim:	"Die Aufgabe hat keine Lösung, denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit:	"Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."

Claudia: "Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."

Dorit: "Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."

Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

28. Mathematik-Olympiade 1988/89
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280721:

Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen.

(1) André: "Die Zahl ist durch 11 teilbar."

(2) Birgit: "Die Zahl ist eine Primzahl."

(3) Christian: "Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."

(4) Doris: "Die Zahl ist eine Quadratzahl."

Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.

Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

Aufgabe 280722:

Es sei ABC ein Dreieck, darin sei CD die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

Aufgabe 280723:

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie $5 : 4$.

(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von $5,4\,\text{cm}$.

(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.

Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

Aufgabe 280724:

a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!

b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1 000!

28. Mathematik-Olympiade 1988/89
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280731:

Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2. Wäre das Volumen von w_2 um genau 9 cm^3 kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.

Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Aufgabe 280732:

In einer Fabrik zur Herstellung von alkoholhaltigen Essenzen soll aus einem Restbestand von 300 kg 32prozentigem Alkohol durch Zugabe von 90prozentigem Alkohol ein neuer Bestand von 40prozentigem Alkohol hergestellt werden.

Ermittle diejenige Menge 90prozentigen Alkohols, mit der das erreicht wird!

Aufgabe 280733:

Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.

(2) Für diese Punkte gilt $\overline{AD} + \overline{BE} = \overline{DE}$.

I. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!

II. Beschreibe eine solche Konstruktion!

III. Zeige, daß eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!

IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

Aufgabe 280734:

Ermittle alle diejenigen Paare (p, q) aus zwei Primzahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen!

(1) Es gilt $q > p + 1$.

(2) Die Zahl $s = p + q$ ist ebenfalls eine Primzahl.

(3) Die Zahl $p \cdot q \cdot s$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 280735:

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:

Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{DD'} + \overline{EE'} + \overline{FF'}$$

Aufgabe 280736:

Auf einer Kreislinie seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 der Reihe nach angeordnet. Dann wird, beginnend mit der Zahl 1, jede fünfzehnte Zahl mit einer Markierung versehen, d.h., die Zahlen 1, 16, 31, 46, ... u.s.w. werden markiert.

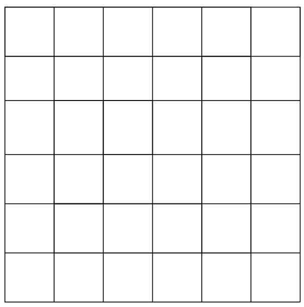
Dieses Weiterzählen und Markieren jeder fünfzehnten Zahl wird umlaufend fortgesetzt, d.h., beim Weiterzählen läßt man auf die Zahl 1000 wieder die Zahl 1 folgen. Auch Zahlen, die bereits markiert sind, werden beim Weiterzählen stets mit berücksichtigt. Erst wenn zum weiteren Markieren nur noch Zahlen erreicht würden, die bereits markiert sind, wird der Vorgang beendet.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Zahlen auf dem Kreis, die dann ohne Markierung geblieben sind!

29. Mathematik-Olympiade 1989/90
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290711:



Auf ein 6×6 - Felderbrett (siehe Bild) sollen 18 Steine so verteilt werden, daß jeder Stein in genau einem Feld liegt, in jedem Feld nicht mehr als ein Stein liegt sowie in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonalen nicht mehr als drei Steine liegen.

Gib eine derartige Verteilung an!

Hinweis: Unter einer Diagonale wollen wir in dieser Aufgabe jede Gerade verstehen, die in einer Diagonalrichtung des Quadrates durch die Mittelpunkte von mehreren (mindestens 2, höchstens 6) Feldern verläuft. Es gibt folglich auf diesem Brett genau 18 verschiedene Diagonalen.

Aufgabe 290712:

Thomas, Uwe und Volker belegten bei einer Mathematikolympiade die ersten drei Plätze, jeder von ihnen einen anderen Platz als die beiden anderen. Über diese Plazierung wurden nun die folgenden drei Aussagen gemacht:

(1) Thomas wurde nicht Erster.

(2) Uwe wurde nicht Zweiter.

(3) Volker wurde Zweiter.

Von diesen drei Aussagen (1), (2), (3) ist genau eine wahr.

Untersuche, ob sich hieraus ermitteln läßt, wer von den drei Schülern den ersten, den zweiten und den dritten Platz belegte! Ist dies der Falt so gib die Plazierung an!

Aufgabe 290713:

Rolf sagt an seinem Geburtstag, dem 1. September 1989: "Die Quersumme der Jahreszahl meines Geburtsjahres ist zugleich auch das in Jahren gerechnete Alter, das ich heute erreiche."

Untersuche, ob es genau ein Jahr als Rolfs Geburtsjahr gibt, für das seine Aussage zutrifft! Ist das der Fall, so gib dieses Geburtsjahr an!

Aufgabe 290714:

Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit:

Klaus behauptet: "Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke

180°. Folglich muß im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen."

Anja entgegnet: "Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muß folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen."

Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!

Anmerkung: Unter einem konvexen Viereck versteht man ein Viereck, dessen beide Diagonalen innerhalb dieses Vierecks liegen (vgl. Lb. 6, S. 179).

29. Mathematik-Olympiade 1989/90
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290721:

Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte. Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Restbetrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau $1,05$ M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.

Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

Aufgabe 290722:

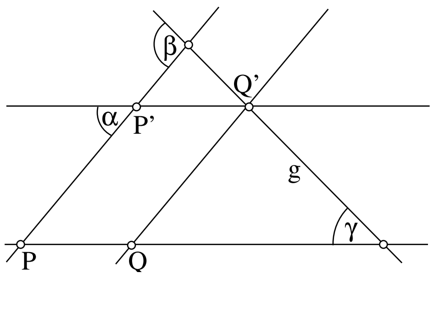
An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluß aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren. Weise nach, daß dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluß aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben. Weise nach, daß bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus. Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

Aufgabe 290723:



Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung. Durch Q' ist eine Gerade g gelegt. Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.

Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

Aufgabe 290724:

a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, daß die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!

b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, daß die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!

c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!

d) Beweise, daß man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

29. Mathematik-Olympiade 1989/90
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290731:

28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100 m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100 m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.

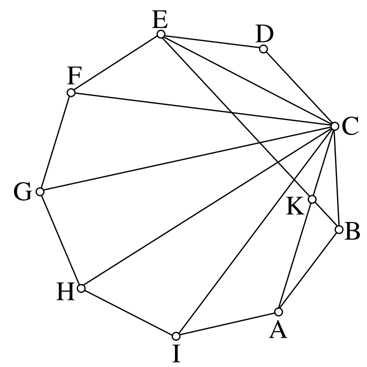
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100 m-Lauf starteten.

(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100 m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.

(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100 m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

Aufgabe 290732:



Gegeben sei ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$.

a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!

b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!

c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle CKE$!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

Aufgabe 290733:

Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß $a = 5,0$ cm, $s_a = 6,0$ cm und $h_c = 4,3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen $5,0$ cm, $6,0$ cm und $4,3$ cm konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Stelle fest, ob durch diese Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 290734:

Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $z_1 > z_2$.

(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.

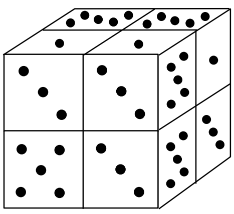
(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

Aufgabe 290735:

Wir betrachten das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis einschließlich 1 000.

Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

Aufgabe 290736:



Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt. Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede genau auf einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5.

Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie die Abbildung zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

(a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0,5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!

(b) Beweise, daß in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!

30. Mathematik-Olympiade 1990/91
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300711:

Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen. Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner Hand zu addieren.

Jedesmal, wenn ein Spieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte.

Wie war das möglich?

Aufgabe 300712:

Fünf Schüler der Klasse $7a$ sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.

a) Wieviel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?

b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

Aufgabe 300713:

Von drei Geraden wird vorausgesetzt, daß sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, daß sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, daß C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Winkel $\sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle ABC$ einander gleich groß sind.

a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind!

b) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

Aufgabe 300714:

In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180° in jedem Viereck 360°.

a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miß die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?

b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!

c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d.h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß kein Innenwinkel gleich 180° ist.

30. Mathematik-Olympiade 1990/91
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300721:

Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:

(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.

(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.

(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.

Gib eine

a) möglichst kleine,

b) möglichst große

Schülerzahl der Schulklasse an, bei der die drei Aussagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

Aufgabe 300722:

a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1 000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.

(2) a läßt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.

(3) a ist eine ungerade Zahl.

b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe (a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung wegläßt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

Aufgabe 300723:

a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleich große Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, daß mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.

Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.

Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, daß der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

Aufgabe 300724:

In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, daß der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, daß dann auch stets der Winkel $\sphericalangle BSE$ die Größe $60°$ hat!

b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\sphericalangle BAC$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSE$ ergibt!

30. Mathematik-Olympiade 1990/91
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300731:

In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

> Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
>
> Mit wieviel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß der Hund der Spur des Fuchses folgt und daß beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Aufgabe 300732:

200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.

Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.

Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, daß B eine andere Größe als A hat.

Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muß!

Aufgabe 300733:

Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4,0\,\text{cm}$ und $p_b = 4,0\,\text{cm}$ sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

(1) Es gilt $\overline{BD} = h_b$.

(2) Es gilt $\overline{AD} = p_b$.

(3) Der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;

b) beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).

d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 300734:

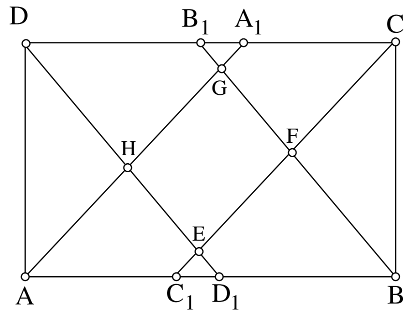
Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 auswählen:

> Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird.
>
> Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, daß folgendes gilt: Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.

Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

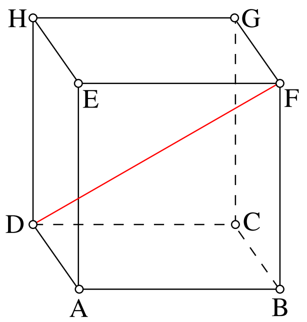
Aufgabe 300735:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, daß die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind. Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.



Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!

Aufgabe 300736:



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.

Beweise, daß die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!

31. Mathematik-Olympiade 1991/92
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310711:

Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück. Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:

die Hälfte der roten Bälle,

zwei Drittel der blauen Bälle und

ein Viertel der grünen Bälle.

Es stellte sich heraus, daß danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.

Ermittle aus diesen Angaben,

a) wieviele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren.

b) wieviele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

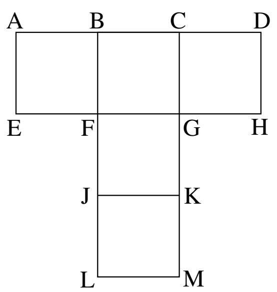
Aufgabe 310712:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.

(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

Aufgabe 310713:



Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in der Abbildung bezeichnet.

a) Zeichne eine solche Figur mit $\overline{AB} = 2\,\text{cm}$ und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\sphericalangle BSD$ auf!

b) Beweise diese Vermutung!

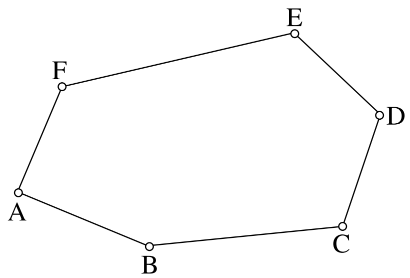
Aufgabe 310714:

a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verläßt, auf der auch C liegt!

Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck $ABCDEF$, wie die Abbildung zeigt, einen Punkt E', für den $ABCDE'$ ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck $ABCDEF$ hat!

Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, daß ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!



31. Mathematik-Olympiade 1991/92
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310721:

Matthias, Thomas, Frank und Sven haben im Hof bei den Wohnhäusern Fußball gespielt. Eine Fensterscheibe ging zu Bruch; genau einer der vier Jungen hat sie mit seinem mißglückten Torschuß zerschlagen. Sie machen nun folgende Aussagen:

Matthias: Es war Thomas oder Frank, der die Scheibe zerschlug.

Thomas: Ich war es nicht.

Frank: Ich auch nicht.

Sven: Frank hat es getan.

Rolf, der alles beobachtet hat, stellt fest, daß mindestens drei dieser vier Aussagen wahr sind.

Untersuche, ob durch Rolfs Feststellung, wenn sie wahr ist, eindeutig bestimmt ist, wer die Scheibe zerschlug! Wenn das der Fall ist, ermittle diesen Täter!

Aufgabe 310722:

Susann will die Summe s aller derjenigen vierstelligen natürlich Zahlen berechnen, die durch 4 teilbar sind. Tamara ermittelt die Summe t aller derjenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.

a) Sind s und t einander gleich oder, wenn nicht, welche der beiden Zahlen ist die größere?

b) Welchen Betrag hat die Differenz zwischen s und t?

Begründe deine Antworten!

Aufgabe 310723:

a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$ betragen und der Winkel $\sphericalangle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat!

   Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, daß diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!

b) Beweise, daß für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\sphericalangle BAD$ kleiner als 90° ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 310724:

a) Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$, in dem die Seitenlängen

$$\overline{AB} = 50\,\text{mm}, \qquad \overline{BC} = 45\,\text{mm}, \qquad \overline{AE} = 54\,\text{mm}$$

betragen und die Innenwinkel $\sphericalangle BAE$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle AED$ in dieser Reihenfolge die Größen $\alpha = 100°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 106°$, $\epsilon = 114°$ haben!

b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, daß das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat!

Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G!

Beweise, daß von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!

31. Mathematik-Olympiade 1991/92
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310731:

Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:

> Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
> Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
> Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
> usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, daß jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt! Überprüfe, daß für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Aufgabe 310732:

Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

> "Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900 + j)$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105\,792$."

Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 310733:

Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!

b) Beweise, daß für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!

c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.

Aufgabe 310734:

Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, daß eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.

Beweise, daß für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 310735:

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.

Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

Aufgabe 310736:

Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.

(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.

(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!

b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4. Zeige, daß eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!

32. Mathematik-Olympiade 1992/93
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320711:

Karsten, Lutz, Mike und Norbert sammelten Pilze. Anschließend vergleichen sie ihre Sammelergebnisse und stellen fest:

(1) Norbert sammelte mehr als Mike.

(2) Karsten und Lutz sammelten zusammen ebenso viel wie Mike und Lutz zusammen.

(3) Karsten und Norbert sammelten zusammen weniger als Lutz und Mike zusammen.

Untersuche, ob aus diesen Angaben

a) genau einer der vier Jungen als Sammler der meisten Pilze,

b) genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze

hervorgeht! Gib jeweils, wenn das der Fall ist, den Namen des betreffenden Jungen an!

Aufgabe 320712:

Kathrins Aquarium hat die Form eines oben offenen Quaders. Es ist 80 cm lang, 40 cm breit und 42 cm hoch. Der Wasserspiegel befindet sich 7 cm vom oberen Rand entfernt.

Untersuche, ob man zusätzlich noch 10 Liter Wasser in dieses Aquarium gießen kann, ohne daß es überläuft!

Aufgabe 320713:

Ein Wasserbehälter soll durch zwei Röhren gefüllt werden. Zum Füllen nur durch die erste Röhre wären 3 Stunden erforderlich, zum Füllen nur durch die zweite Röhre 2 Stunden.

In wieviel Minuten ist der Behälter voll, wenn durch beide Röhren gleichzeitig gefüllt wird?

Aufgabe 320714:

In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Die Strecken AD und CD seien einander gleichlang, die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle BCD$ im Teildreieck BCD betrage 35°.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC!

32. Mathematik-Olympiade 1992/93
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320721:

In einer Diskussion werden drei verschiedene Aufgabenstellungen betrachtet:

a) Die Zahl 231 soll als Produkt dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine Primzahl sein.

b) Die Zahl 231 soll als Produkt aus genau drei Faktoren dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl sein. Je zwei der Faktoren sollen voneinander verschieden sein.

c) Dieselbe Aufgabe wie b) wird mit 462 statt 231 gestellt.

Gib zu a), b) und c) jeweils alle verschiedenen Darstellungen an! Dabei gelten Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, nicht als verschieden. Begründe, daß du alle gesuchten Darstellungen angegeben hast!

Aufgabe 320722:

$ABCD$ sei ein Quadrat, sein Flächeninhalt betrage $25\,\text{cm}^2$. Ein Punkt E liege so auf der Verlängerung der Diagonalen AC über C hinaus, daß die Strecke AE doppelt so lang wie die Strecke AC ist.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Vierecks $ABED$!

Aufgabe 320723:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm. Die Mittelsenkrechte von AC schneide AC in M und AB in E.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Winkel $\sphericalangle MEA$ und $\sphericalangle MCB$ einander gleichgroß sind!

b) Ein Punkt D liege so auf der Geraden durch E und M, daß AC den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert.

Beweise, daß das Viereck $ABCD$ dann ein Trapez sein muß!

Aufgabe 320724:

In einen Hallenbad befindet sich auch ein Planschbecken für Kinder. Es kann durch eine Warmwasserleitung und eine Kaltwasserleitung bis zu einer markierten Höhe gefüllt werden. Würde man nur die Warmwasserleitung betreiben, so würde es $12\,\frac{1}{2}$ Minuten dauern, bis der Wasserspiegel diese Höhe erreicht. Nur mit der Kaltwasserleitung würde man 10 Minuten dazu brauchen.

Um eine vorgesehene Wassertemperatur zu erreichen, wurde zunächst $2\frac{1}{2}$ Minuten lang aus beiden Leitungen Wasser eingelassen; dann wurde die Warmwasserleitung geschlossen.

Berechne die Zeit, die danach noch gebraucht wurde, um allein mit der Kaltwasserleitung den Rest des Beckens bis zur markierten Höhe zu füllen!

32. Mathematik-Olympiade 1992/93
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320731:

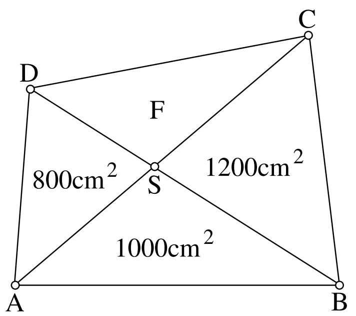
a) Vier rote Kugeln, zwei gelbe Kugeln und eine blaue Kugel sollen so auf zwei Kästen A und B verteilt werden, daß sich in A drei und in B vier Kugeln befinden.

   Wieviele derartige Verteilungen gibt es insgesamt?

b) Jetzt werden gleichfarbige Kugeln durch eine zusätzliche Numerierung voneinander unterschieden. Die Verteilungen unterscheiden sich dann nicht nur darin, wieviele Kugeln der einzelnen Farben in den Kästen A und B sind, sondern auch, welche Nummern sie tragen.

   Wieviele solcher Verteilungen gibt es insgesamt?

Aufgabe 320732:



Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte $1\,000\ \text{cm}^2$, $800\ \text{cm}^2$ bzw. $1\,200\ \text{cm}^2$ haben, so wie dies in der Abbildung angegeben ist.

Weise nach, daß durch diese Voraussetzung der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!

Aufgabe 320733:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, daß $\overline{BP} = 2$ cm gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $\overline{CQ} = 2$ cm, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $\overline{AR} = 2$ cm.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!

a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.

b) Es ist $MP \cong MQ \cong MR$.

Aufgabe 320734:
Ermittle die Anzahl aller derjenigen sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 5 teilbar sind und deren Quersumme durch 9 teilbar ist!

Aufgabe 320735:

Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ die Größe $32°$ hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, daß $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, daß $\overline{BE} = \overline{BC}$ gilt.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\sphericalangle DCE$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

Aufgabe 320736:

Über ein Schwimmbecken wurden folgende Angaben gemacht:

Das Becken kann durch zwei getrennte Wasserleitungen gefüllt werden. Aus der zweiten Leitung strömen in jeder Minute 50 Kubikmeter mehr heraus als aus der ersten. Um das Becken vollständig zu füllen, werden 48 Minuten gebraucht, wenn beide Leitungen gleichzeitig geöffnet sind; dagegen 2 Stunden, wenn nur die erste Leitung geöffnet ist.

Untersuche, ob das Volumen des Beckens durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Volumen!

33. Mathematik-Olympiade 1993/94
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330711:

In einer Hühnerfarm wurden 2 500 Hühner gehalten. Am ersten Tag eines Monats war Futter vorhanden, das für genau 30 Tage ausreichend war. Nach genau 14 Tagen wurden 500 Hühner geschlachtet.

Um wieviele Tage länger wurde dadurch die Zeit, für die das Futter ausreichend war?

Aufgabe 330712:

Eine sechsstellige natürliche Zahl soll, in der Reihenfolge von links nach rechts gelesen, Ziffern 3, a, 3, b, 2, c haben.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, daß die genannte Zahl durch 90 teilbar ist!

Aufgabe 330713:

Anke berichtet, daß sie ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang 14 cm gezeichnet hat, in dem eine der drei Seiten genau dreimal so lang ist wie eine zweite der drei Seiten.

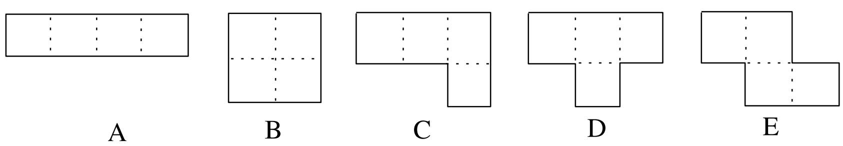
Beate meint, durch diese Angaben seien die Längen aller drei Seiten eindeutig bestimmt.

Christin meint dagegen, die Angaben könnten bei mehr als einer Möglichkeit für die drei Seitenlängen zutreffen.

Untersuche, ob Beate oder Christin recht hat! Ermittle alle vorhandenen Möglichkeiten für die drei Längen!

Aufgabe 330714:

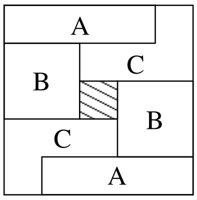
Ein Legespiel besteht aus je vier Legesteinen der in der ersten Abbildung gezeigten Formen A, B, C, D und E. Jeder dieser 20 Legesteine ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 1 cm zusammengesetzt.



a) Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 4 cm soll durch Legesteine einer einheitlichen Form vollständig bedeckt werden, ohne daß Legesteine sich dabei ganz oder teilweise überlappen oder über das Quadrat hinausragen.

Untersuche, mit welchen der Formen A, B, C, D, E dies möglich ist, und mit welchen dieser Formen es sogar verschiedene Möglichkeiten gibt!

b) In der Abbildung ist gezeigt, wie die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 5 cm mit herausgenommenem schraffiertem Mittelquadrat durch sechs Legesteine bedeckt werden kann. Dabei ist die zusätzliche Forderung erfüllt, daß drei verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.



Gib mindestens vier weitere Möglichkeiten an, diese Forderung zu erfüllen!

c) Die Fläche einen Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm soll durch acht Legesteine bedeckt werden. Dabei sollen vier verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.

Gib zwei Möglichkeiten an, die sich in den verwendeten Sorten unterscheiden!

Anregung: Formuliere selbst derartige Aufgaben und suche Lösungen! Nenne auch unlösbare derartige Aufgaben!

Hinweis: Zwei Bedeckungen gelten genau dann als verschieden, wenn es keine Spiegelung oder Drehung gibt, die sie ineinander überführt. Bei den Legesteinen wird nicht zwischen "Oberseite" und "Unterseite" unterschieden; jeder Stein darf also auch "gewendet" werden.

33. Mathematik-Olympiade 1993/94
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330721:

An einer Schule gibt es für die Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Deutsch und Englisch drei Lehrer. Ihre Familiennamen sind Schröter, Berger und Müller. Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet genau zwei der genannten Fächer, jedes dieser Fächer wird von genau einem Lehrer unterrichtet. Ferner wird über diese Lehrer erzählt:

(1) Zwei der Lehrer, nämlich Herr Berger und der Geschichtslehrer, sind miteinander verwandt.

(2) Drei der Lehrer, nämlich Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Englischlehrer, treffen sich oft auf ihrem Weg zur Schule.

(3) Herr Schröter hat neulich den erkrankten Geschichtslehrer vertreten.

(4) Herr Schröter und der Mathematiklehrer sind Gartennachbarn voneinander.

(5) Herr Berger ist älter als der Deutschlehrer.

Untersuche, ob es eine Verteilung der Fächer auf die Lehrer gibt, bei der alle diese Aussagen zutreffen können, und ob die Verteilung der Fächer durch die Aussagen eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Verteilung an!

Aufgabe 330722:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und 2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 24 teilbar.

(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 1, die dritte Ziffer von z ist eine 3.

Aufgabe 330723:

Über ihre viertägige Radtour berichten Teilnehmer:

Michael: "Am zweiten Tag haben wir genau 7 km mehr als am dritten Tag zurückgelegt."

Martin: "Am zweiten und am dritten Tag sind wir insgesamt 105 km gefahren."

Matthias: "Am ersten Tag wurden genau $\frac{5}{16}$ und am vierten Tag genau $\frac{1}{4}$ der gesamten Weglänge aller vier Tage geschafft."

Weise nach, daß durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wieviele Kilometer an jedem der vier Tage zurückgelegt wurden, und gib diese vier Weglängen an!

Aufgabe 330724:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muß der Basiswinkel $\sphericalangle BAC$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, bei dem die Punkte H und W miteinander zusammenfallen?

b) Welche Größe muß der Winkel $\sphericalangle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem ein Basiswinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $70°$ hat?

c) Ermittle alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\sphericalangle BAC$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ möglich sind, bei dem der Winkel $\sphericalangle WAH$ die Größe $15°$ hat!

33. Mathematik-Olympiade 1993/94
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330731:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl z ist durch 48 teilbar.

(2) Die zweite Ziffer der Zahl z ist eine 3, die dritte Ziffer von z ist eine 4.

Aufgabe 330732:

In einem Kaufhaus waren $\frac{4}{5}$ aller Beschäftigten Frauen. Zu Anfang eines Monats waren 12,5% dieser Frauen nicht verheiratet. Von den in diesem Kaufhaus beschäftigten Männern waren 18,75% nicht verheiratet.

Während des Monats heirateten vier Paare, von denen jeweils sowohl der Mann als auch die Frau zu den eben genannten unverheirateten Beschäftigten des Kaufhauses gehörten. Weitere Änderungen gab es nicht. Danach waren noch genau 36 Beschäftigte des Kaufhauses unverheiratet.

Wie viele Beschäftigte hatte das Kaufhaus insgesamt?

Aufgabe 330733:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ bzw. $\sphericalangle ACB$ bezeichnet.

a) Wie groß sind die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?

b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle ASB$ die Größe 140° hat!

c) Beweise, daß jedes Dreieck ABC, in dem $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!

Aufgabe 330734:

Ulrike sitzt am Fenster eines Zuges, der mit der Geschwindigkeit $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt. Sie beobachtet, daß an ihrem Fenster ein Gegenzug innerhalb von 4 Sekunden vorüberfährt. Außerdem weiß sie, daß dieser Gegenzug 120 m lang ist.

Untersuche, ob die Geschwindigkeit des Gegenzuges durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, gib diese Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an!

Aufgabe 330735:

Die Klassen $7a$, $7b$, $7c$ trugen ein Fußballturnier aus. Jede Klasse spielte genau einmal gegen jede andere Klasse. Am Ende ergab sich folgender Tabellenstand:

Klasse	Torverhältnis	Punktverhältnis
$7b$	3:2	3:1
$7a$	3:1	2:2
$7c$	2:5	1:3

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig für jedes Spiel bestimmt ist, wieviele Tore jede Mannschaft in dem betreffenden Spiel erzielt hat! Wenn das der Fall ist, so gib alle diese Ergebnisse an!

Hinweis: Wie üblich bedeutet das Torverhältnis $a : b$ für eine Mannschaft, daß sie in allen Spielen zusammen a Tore erzielt hat und b Tore hinnehmen mußte. Ferner erhält die Mannschaft für jedes gewonnene Spiel 2 Pluspunkte, für jedes verlorene Spiel 2 Minuspunkte und für jedes unentschiedene Spiel 1 Plus- und 1 Minuspunkt. Diese Punkte werden addiert, und dann bedeutet das Punktverhältnis $c : d$, daß die Mannschaft die Summe c der Pluspunkte und die Summe d der Minuspunkte erhalten hat.

Aufgabe 330736:

a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!

   Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, daß die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)

   Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, daß die genannte Bedingung stets mit diesem - nach Deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

34. Mathematik-Olympiade 1994/95
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340711:

Armin hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 1 m Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein.

Finde alle Möglichkeiten dafür, wie viele Stäbchen von 7 cm und wie viele von 12 cm sich zu einer solchen Belegung zusammenstellen lassen!

Aufgabe 340712:

Von einem Dreieck ABC wird gefordert: Die Winkelhalbierende durch A und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich in einem Punkt D, der auf der Seite BC liegt.

a) Welche Größe muß der Winkel $\sphericalangle ACB$ in einem Dreieck haben, das diese Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 35° hat? Zeichne ein solches Dreieck!

b) Zeichne ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 50° hat!

c) Gibt es ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 60° hat?

Aufgabe 340713:

Franziska sucht eine vierstellige natürliche Zahl z, für die die folgenden Aussagen (1), (2) und (3) gelten:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 größer als die Zehnerziffer von z.

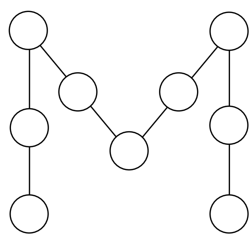
(2) Die Hunderterziffer von z ist doppelt so groß wie die Zehnerziffer von z.

(3) Die Zahl z ist doppelt so groß wie eine Primzahl.

Weise nach, daß es genau eine solche Zahl gibt; ermittle diese Zahl!

Aufgabe 340714:

In die Kreise der Zeichnung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 eingetragen werden. Dabei soll folgende Bedingung erfüllt werden: Auf jeder der vier Dreiergruppen, die mit geradliniger Verbindung gezeichnet sind, ergibt sich dieselbe Summe s.



a) Welches ist der kleinste Wert von s, mit dem diese Bedingung erfüllbar ist? Gib eine Eintragung an, bei der diese Summe s vorliegt! Beweise, daß keine kleinere Summe möglich ist!

b) Welches ist der größte Wert s, mit dem die genannte Bedingung erfüllbar ist? Gib auch hierzu eine Eintragung an!

c) Ist die Bedingung auch mit allen denjenigen natürlichen Zahlen s erfüllbar, die zwischen dem kleinsten und dem größten Wert aus a) bzw. b) liegen?

34. Mathematik-Olympiade 1994/95
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340721:
Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sich diese ehrlich teilen sollten.

Lars, der allein im Haus war, nahm sich als erster seinen Anteil: Er entnahm dem Korb ein Drittel der Nüsse. Katja, die beim Nachhausekommen nicht wußte, daß sich Lars bereits bedient hatte, nahm von den im Korb verbliebenen Nüssen ein Drittel. Schließlich nahm ebenfalls Markus ein Drittel der im Korb verbliebenen Nüsse. Es waren noch 16 Nüsse im Korb.

Wie viele Nüsse hatte jedes der drei Kinder genommen?

Aufgabe 340722:

a) Ein Wettspielgewinn von 1 485 DM soll auf drei Teilnehmer im Verhältnis 2 : 3 : 4 aufgeteilt werden.

   Wieviel bekommt jeder?

b) Bei einem anderen Spiel erhält ein Teilnehmer ein Fünftel der Gewinnsumme, das sind 150 DM. Der Rest soll auf die beiden anderen Teilnehmer im Verhältnis 5 : 7 aufgeteilt werden.

   Wieviel bekommt jeder von ihnen?

c) Bei einem dritten Spiel wurde vereinbart, den Gewinn im Verhältnis der Einsätze aufzuteilen, mit denen sich die Teilnehmer an dem Wettspiel beteiligt hatten. Die Summe dieser Einsätze der drei Teilnehmer Anke, Bertram und Claus hatte 44 DM betragen, ferner gilt: Hätte Anke 6 DM mehr eingesetzt und hätte Claus das Doppelte seines Einsatzes eingesetzt, so hätten alle drei den gleichen Gewinnanspruch erreicht. Wie groß waren die drei Einsätze?

Aufgabe 340723:
In den Dreiecken ABC seien wie üblich die Größen der Innenwinkel bei A, B und C mit α, β bzw. γ bezeichnet. Ferner werde vorausgesetzt, daß die Mittelsenkrechte der Seite AB und die durch A gehende Winkelhalbierende sich in einem Punkt D schneiden, der auf der Seite BC liegt.

a) Leite eine Formel her, nach der in jedem Dreieck, das diese Voraussetzung erfüllt, γ von β abhängt! Für welche Werte von β gibt es ein Dreieck, das die genannten Voraussetzung erfüllt; für welche Werte von β gibt es kein solches Dreieck?

b) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, rechtwinklig ist!

c) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, gleichschenklig ist!

Aufgabe 340724:

a) Für fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wird gefordert, daß ihre Summe 230 beträgt.

Zeige, daß es genau eine Möglichkeit gibt, diese Forderung durch fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen zu erfüllen! Welches ist die erste dieser fünf Zahlen?

b) Jetzt wird gefordert, daß die Summe durch 23 teilbar sein und dabei einen möglichst kleinen Wert haben soll.

Welches ist die erste von fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, mit denen diese Forderungen erfüllt werden?

34. Mathematik-Olympiade 1994/95
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340731 = 340941:

Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1 000 000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk:
(1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.
(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.

Evelyn:
(1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.
(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.

Franziska:
(1) Die gesuchte Zahl lautet 91 809.
(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, daß die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Aufgabe 340732:

Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.

a) Wieviel Stellen hat z?

b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.

Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 340733:

Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = 4\,\text{cm}$ vorausgesetzt wird.

b) Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, daß es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?

Beweise auch, daß aus dieser Voraussetzung folgt, daß das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!

Aufgabe 340734:

Ein Viereck heißt genau dann *konvex*, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.

Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Aufgabe 340735:

In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."

Daniel sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks."

Beweise, daß beide Aussagen wahr sind!

Aufgabe 340736:

Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, daß jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!

b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!