1. - 34. Olympiade - Klasse 11

Aufgaben

Gewidmet meinen Kindern Cosima, Elias und Adrian

Vorwort

Im vorliegenden Heftchen befinden sich Texte vergangener Mathematikolympiaden, die ich vor einigen Jahren zum Üben gern selbst besessen hätte. Als Schüler träumte ich von einer kompletten Sammlung aller Aufgaben und Lösungen, allerdings wurde dieser Traum erst 15 Jahre später wahr (2003). Zu DDR-Zeiten war es äußerst schwer, an diese Dokumente zu gelangen, aber selbst jetzt gibt es nur wenig öffentlich zugängiges Material aus jener Zeit.

Die einst von der Aufgabenkommission erfundenen Texte wurden mir größtenteils von Herrn Umlauft zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm sehr danke. Ebenso möchte ich aber auch all die anderen Menschen erwähnen, die zur Erweiterung meiner Sammlung beigetragen haben: O. Döhring, H. Thielemann, H. Winkelvoss, E. Specht, E. Keller, G. Thiel, B. Mulansky, H. Ocholt sowie M. Worel.

Franz S. hat mir sehr geholfen, indem er unzählige Aufgabentexte als Papiervorlagen eingescannt und durch ein Texterkennungsprogramm geschickt hat. Bezüglich der Lösungen ist mein Mann Thomas nun in dessen Fußstapfen getreten.

Ein herzlicher Dank gilt meiner Familie, ganz besonders natürlich meinem Mann, der mir stets mit viel Verständnis für meine zeitraubenden Interessen zur Seite steht. Außerdem möchte ich meinen Eltern und Schwiegereltern danken, die sich immer wieder gern um die Kinder kümmern und mir damit kleine Freiräume verschaffen.

Copyright

Fragen beantworte ich nach Möglichkeit gern. Der mir liebste Weg ist per Email an *mawi@online.de*. Sollte ich nicht sofort antworten, bitte ich jedoch um Nachsicht mit einer voll berufstätigen Mutter, die unter chronischem Zeitmangel leidet.

Hinweise

Die Numerierung der Aufgaben erfolgt nach dem Schema: $jjkksa$, wobei jj der Aufgabenjahrgang, kk die Klassenstufe, s die Olympiadestufe und a die Aufgabennummer darstellt. Bei Wahlaufgaben folgt der Aufgabennummer noch ein A oder B.

Die Texte entsprechen den Originaltexten der jeweiligen Olympiaden - es wurden daher weder auf die neue deutsche Rechtschreibung Rücksicht genommen noch ideologische Phrasen umformuliert.

Teilweise habe ich mir erlaubt, Texte den Originalen anzupassen, auch wenn der aufgeführte Autor (damit ist derjenige gemeint, der den Text aufgeschrieben aber nicht zwangsläufig erfunden hat) eine andere Fassung lieferte. Lösungen habe ich teilweise zur aus meiner Sicht besseren Verständlichkeit überarbeitet.

Dresden, 11. März 2014 *Manuela Kugel*

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011111:

Es ist zu beweisen, daß bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 011112:

Ein Dampfer fährt auf einem Fluß von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

Aufgabe 011113:

Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, daß der erhaltene Schnitt ein

a) gleichseitiges Dreieck,

b) Quadrat,

c) regelmäßiges Fünfeck,

d) regelmäßiges Sechseck

ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Aufgabe 011114:

Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.

Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 011115:

Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind. Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, daß in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wieviel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wieviel haben eine, wieviel zwei und wieviel drei angestrichene Flächen?

b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011121:

3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden.

Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist? Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Aufgabe 011122:

Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in „Rollenform“ (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße:	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße:	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

a) Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

b) Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

Aufgabe 011123:

Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann.

Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?

Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Aufgabe 011124:

Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, daß ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist. Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!

Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011131:

Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.

Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 m/s^2 eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 011132:

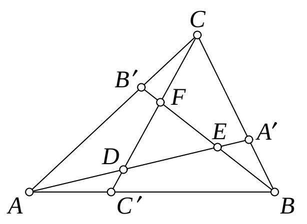
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält? Die Behauptung ist zu begründen!

Aufgabe 011133:

In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator. Eine sozialistische Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so daß die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen. Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13 500,- M aufgewandt werden.

Wieviel Ventilatoren müßten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird? Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d. h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

Aufgabe 011134:



Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A', B' bzw. C', so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist (vgl. die Abbildung).

Aufgabe 011135 = 011234:

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB} = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke. Schlagen Sie mit $\overline{AM}$ um M den Halbkreis über $\overline{AB}$! Halbieren Sie $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{\overline{AM}}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!

Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt! Die Konstruktion ist zu begründen!

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021111:

Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongreßgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte. Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m. Berechnen Sie:

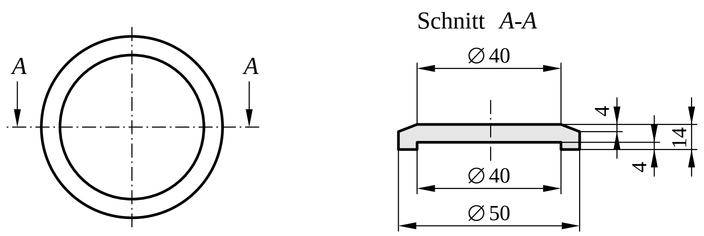
a) den Radius r der Kugel,

b) die Fläche der Kugelkalotte und

c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4\,\text{mm}$, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7\,\text{p/cm}^3$.)

Aufgabe 021112:

Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50\,\text{mm}$, $h = 14\,\text{mm}$) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?

b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Aufgabe 021113:

Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2. Beweisen Sie, daß für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}.$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

Aufgabe 021114:

Es ist zu beweisen, daß für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}.$$

Aufgabe 021115:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,\mathrm{cm}$ und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5\,\mathrm{cm}$ vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.

a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, daß $\overline{PR} = \overline{PQ}$ ist!

b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

Aufgabe 021116:

Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021121:

Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, daß mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10 000fache gesteigert werden kann.

a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?

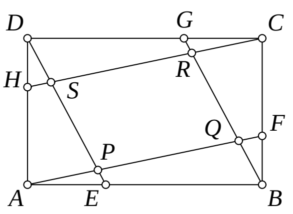
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 021122:

Beweisen Sie, daß stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1,5$ ist!

Aufgabe 021123:



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abb.).

a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?

b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Aufgabe 021124:

Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, daß von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.

Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Aufgabe 021125:

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021131:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}$$

ist!

Aufgabe 021132:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.

In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?

Aufgabe 021133:

Auf wieviel verschiedene Weisen läßt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen? (Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Aufgabe 021134:

Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x+\cos^3 x=1$ zu bestimmen.

Aufgabe 021135:

Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

Aufgabe 021136:

In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, daß keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.

Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke? (Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.)

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031111:

Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.

a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt? Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde $R = 6\,370$ km.)

Aufgabe 031112:

Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)

b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Aufgabe 031113:

Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 031114:

Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Aufgabe 031115:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und den nicht parallelen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch H schneide die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.

Beweisen Sie, daß die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Aufgabe 031116:

Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage $1\,000\,050$.

Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031121:
Es ist zu beweisen, daß $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Aufgabe 031122:
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2.$$

Aufgabe 031123:
In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.

Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

Aufgabe 031124:
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!

b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

Aufgabe 031125:
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \cdot & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M}
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 (A $\neq$ 0). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

Wie lautet die Aufgabe?

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

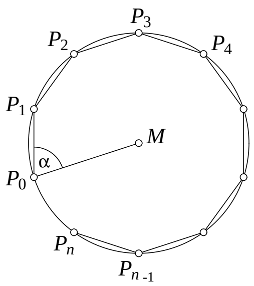
<u>Aufgabe 041111:</u>

Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muß jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

<u>Aufgabe 041112:</u>



In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius $\overline{MP_0}$ den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ... reflektiert (s. Abb.).

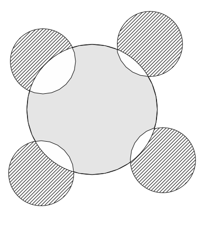
a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!

b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?

c) Es sei $\alpha = 50°$. Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

<u>Aufgabe 041113:</u>

Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, daß diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (s. Abb.).



a) Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt der in der Abb. grauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage läßt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Aufgabe 041114:

Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Aufgabe 041115:

Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 &= 0 \\ 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 &= 0. \end{aligned}$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Aufgabe 041116:

Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1\,620 + 12 \cdot \sqrt{17\,457}} + \sqrt[3]{1\,620 - 12 \cdot \sqrt{17\,457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.