1. - 34. Olympiade - Klasse 6

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010611:

a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139}$,

b) $3\,451\frac{23}{35} - 2\,868\frac{24}{49}$.

Aufgabe 010612:

Bei den im Oktober 1961 durchgeführten sowjetischen Raketenversuchen lagen bei einer Zielentfernung von etwa 12 500 km alle Treffer innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als 1 km war.

Wie groß wäre der Radius des Trefferkreises bei einem Schüler, der mit gleicher Treffsicherheit auf ein 25 m entferntes Ziel einen Schlagball werfen würde?

Aufgabe 010613:

Ein „Trabant" fährt bei einem Kilometerzählerstand von 17 880 km los. Nach der Rückkehr steht sein Kilometerzähler auf 18 030 km. Der Benzinverbrauch betrug 10,5 Liter.

a) Wieviel Kilometer hat der „Trabant" zurückgelegt?

b) Wieviel Liter Treibstoff muß der Fahrer tanken, wenn er eine Strecke von 350 km fahren will?

Aufgabe 010614:

Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Aufgabe 010615:

Wieviel verschiedene Arten von Personenzug-Fahrkarten II. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll? Wie hast du die Anzahl ermittelt?

Aufgabe 010616:

Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden. Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010621:

Bei einem Probeflug auf der Strecke Moskau–Mirny (sowjetische Südpolarstation) überquerten zwei sowjetische Flugzeuge vom Typ „AN-10" und „IL-18" Europa, Asien, Australien, die Antarktis, den Indischen Ozean und den Stillen Ozean. Die AN-10 legte die gewaltige Strecke von 25 300 km in 48 h und 7 min, die IL-18 in 44 h und 36 min zurück.

Welche Strecke überflogen die beiden Flugzeuge durchschnittlich in 1 Stunde?

Aufgabe 010622:

Eine Expedition legte am ersten Tage $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tage $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 1 000 km zurück.

a) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?

b) Wie groß war die Gesamtstrecke?

Aufgabe 010623:

Auf einer Wanderung sagt Rudolf: „Die Entfernung von hier bis Neustadt ist größer als 5 km." Emil sagt: „Die Entfernung bis Neustadt ist kleiner als 5 km." Robert sagt: „Einer von beiden hat recht."

Nun wissen wir, daß Robert eine falsche Aussage gemacht hat. Wie groß ist die Entfernung tatsächlich?

Aufgabe 010624:

Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn P! Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, daß $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020611:

Inge fragt ihren Bruder Klaus, der mit seiner Klasse in den Herbstferien einer LPG bei der Kartoffelernte geholfen hat, nach dem Ergebnis der Erntehilfe. Klaus antwortet: „Insgesamt wurden 15 000 dt Kartoffeln geerntet. $\frac{1}{5}$ dieser Menge sammelten wir Schüler, $\frac{1}{3}$ dieser Menge wurde von einigen Genossenschaftsbauern mit der Kartoffelkombine geerntet, den Rest sammelten die anderen Genossenschaftsbauern.“

Wieviel Dezitonnen Kartoffeln ernteten

a) die Schüler?

b) die Bauern mit der Kartoffelkombine?

c) die übrigen Genossenschaftsbauern?

Aufgabe 020612:

Von den bisher festgesetzten 296 Minuten wurden im Rahmen des Produktionsaufgebotes von den Arbeitern des VEB Druck- und Prägemaschinen Berlin bei einem Arbeitsgang 96 Minuten eingespart. Das macht je hergestellte Maschine 2,40 DM aus.

b) Wie groß ist die Einsparung, wenn 60 Prägemaschinen hergestellt werden?

b) Infolge des Produktionsaufgebotes konnten sogar 83 statt 60 Maschinen in der gleichen Zeit hergestellt werden. Wie groß ist dabei die Einsparung?

Aufgabe 020613:

Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden.“

Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 020614:

Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit der TU 104 von Prag nach Kairo. Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:

a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.

b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker, kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.

c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.

c) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.

Wie heißt der Ingenieur?

Wie heißt der Elektriker?

Wie heißt der Monteur?

Die Lösung ist zu begründen!

Aufgabe 020615:

In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, daß genau

a) kein Schnittpunkt,

b) 1 Schnittpunkt,

c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),

d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),

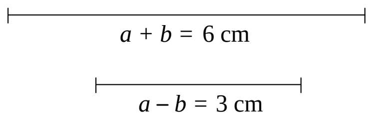
e) 5 Schnittpunkte,

f) 6 Schnittpunkte entstehen!

Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

Aufgabe 020616:

Gegeben sind zwei Strecken. Die eine ist gleich der Summe zweier Strecken, die andere ist gleich ihrer Differenz.



Wie lang sind die Strecken a und b? Beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast!

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020621:

Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Nikolajew und Popowitsch umkreisten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV in rund 88 Minuten einmal die Erde (rund 41 000 km).

a) Welche Strecke legte jedes Raumschiff in einer Stunde zurück?

b) Welche Strecke legte es in jeder Sekunde zurück?

Die Ergebnisse sind sinnvoll zu runden!

Aufgabe 020622:

Beim Werkunterricht benutzt Regine eine Tischbohrmaschine. Sie weiß, daß der Bohrer bei jeder Umdrehung $\frac{1}{4}$ mm tief in das Werkstück eindringt. Sie soll ein Werkstück von 30 mm Dicke durchbohren. Die Bohrmaschine macht in einer Minute 240 Umdrehungen.

In welcher Zeit kann Regine eine Bohrung durchführen?

Aufgabe 020623:

Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$mal so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.

a) Wie lautet die Zahl?

b) Wie hast du sie gefunden?

Zeige, daß es nur eine solche Zahl gibt!

Aufgabe 020624:

Brigitte liebt lustige Knobelaufgaben. Sie erzählt:

„Mein Vater, meine Mutter und ich sind zusammen 88 Jahre alt. Meine Mutter ist genau dreimal so alt wie ich und vier Jahre jünger als mein Vater.“

Wie alt ist Brigitte? Wie alt sind ihre Eltern? Beschreibe, wie man die Lösung finden kann!

Aufgabe 020625:

Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an! Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man P und B, dann soll $\sphericalangle ABP = \sphericalangle APB$ sein.

Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030611:

Für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke gab unsere Regierung im Jahre 1958 rund 15 Milliarden DM aus. Im Jahre 1962 war die entsprechende Summe um ein Drittel höher als 1958.

a) Wieviel DM wurden in der DDR im Jahre 1962 für die genannten Zwecke ausgegeben?

b) Wieviel DM waren das in beiden Fällen je Kopf unserer Bevölkerung, wenn man jeweils eine Einwohnerzahl von rund 17 Millionen annimmt?

Aufgabe 030612:

Eine Pioniergruppe fuhr um 16.00 Uhr mit einem Autobus aus der Stadt in ein Ferienlager. Als sie neun Zehntel des Weges zurückgelegt hatten, mußten die Pioniere 2 km vor dem Lager aussteigen, weil der Bus den Waldweg, der zum Lager führte, nicht mehr befahren konnte. Für den Rest des Weges benötigten sie eine halbe Stunde und trafen um 17.00 Uhr im Lager ein.

Mit welcher Geschwindigkeit fuhr der Bus? (Wieviel Kilometer legte er in einer Stunde zurück?)

Aufgabe 030613:

Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.

a) Zeige, daß unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!

b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

Aufgabe 030614:

Peter, ein junger Mathematiker, sagt zu seinem Vater:

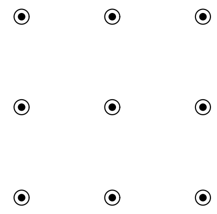
„Ich weiß ein Kunststück. Jeder von uns beiden hat 30 Streichhölzer zur Verfügung und nimmt einige davon in die Hand. Du sagst mir, ob die Anzahl der Streichhölzer, die du in die Hand genommen hast, gerade oder ungerade ist. Ich werde dir dann, ohne nachzuzählen, sagen, ob die Gesamtzahl der übriggebliebenen Streichhölzer gerade oder ungerade ist.“

Wieso weiß Peter das?

Aufgabe 030615:

a) Zeichne 9 Punkte so, wie es die Abbildung zeigt. Lege durch diese Punkte acht verschiedene Geraden so, daß auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen! Fertige eine Zeichnung an!

b) Es sollen nun 2 von diesen 9 Punkten so verschoben werden, daß man genau zehn verschiedene Geraden zeichnen kann, wobei wieder auf jeder dieser Geraden drei Punkte liegen sollen. Fertige auch dazu eine Zeichnung an!



Aufgabe 030616:

Gegeben seien neun Quadrate mit den Seitenlängen

$a = 36$ mm, $d = 20$ mm, $g = 14$ mm,
$b = 30$ mm, $e = 18$ mm, $h = 8$ mm,
$c = 28$ mm, $f = 16$ mm, $i = 2$ mm.

Füge diese Quadrate so zusammen, daß sie ein Rechteck bilden! Fertige dazu eine Zeichnung an!

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030621:

Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück, die Rundfunkwellen dagegen rund 300 000 km. Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher,

a) ein Zuhörer in der ersten Reihe im Saal, der 2 m vom Redner entfernt sitzt, oder

b) ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1 000 km mit Kopfhörern abhört?

Begründe deine Antwort.

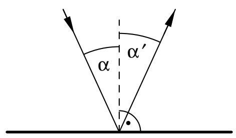
Aufgabe 030622:

Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, daß der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' gleich groß sind (Abb. siehe unten).

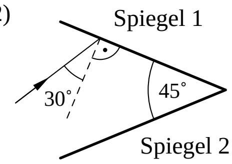
a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!

b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

1)



2)



Aufgabe 030623:

Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung. Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 030624:

Wieviel Streichhölzer von je 5 cm Länge werden gebraucht, um eine quadratische Fläche von 1 m^2 in gleichgroße Quadrate aufzuteilen, die von je vier Streichhölzern begrenzt werden. (Dabei dürfen zwei benachbarte Quadrate nur durch ein Streichholz getrennt werden.)

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040611:

In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m^3 Erde. Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m^3 Erde ausheben.

Verschaffe dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem du ausrechnest, wieviel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

Aufgabe 040612:

J	U	N	G	E	W
U	N	G	E	W	E
N	G	E	W	E	L
G	E	W	E	L	T

Auf wieviel verschiedene Weisen kann man in der nebenstehenden Tabelle die Wörter "Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

Aufgabe 040613:

Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d.h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen. Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

Aufgabe 040614:

Zerlege die Zahl 390 in drei Summanden, von denen der zweite dreimal so groß wie der erste und der dritte $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie der erste ist!

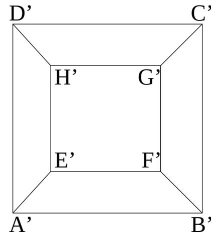
Aufgabe 040615:

Es ist die kleinste natürliche Zahl zu finden, die beim Dividieren

durch 2 den Rest 1,
durch 3 den Rest 2,
durch 4 den Rest 3,
durch 5 den Rest 4 und
durch 6 den Rest 5

aufweist.

Aufgabe 040616:



Die abgebildete Figur ist der Grundriß eines ebenflächig begrenzten Körpers. Die Bilder seiner Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H sind mit A', B', C', D', E', F', G', H' bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrißebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrißebene im Abstand von 4 cm. Die Seite AB ist 5 cm, die Seite EF 3 cm lang.

Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

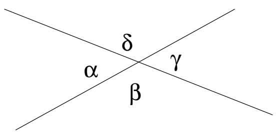
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040621:

Ein Rohr von 10 m Länge soll senkrecht zur Achse so zerschnitten werden, daß der eine Teil fünfmal so lang wie der andere ist.

Wie lang werden die Teile?

Aufgabe 040622:



Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel α, β, γ, δ (Abbildung).

Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?

Aufgabe 040623:

Ein rechteckiger Schulgarten soll eingezäunt werden. Auf jeder der kürzeren Seiten, die jeweils je 40 m lang sind, stehen 21 Zementsäulen, auf den längeren jeweils 15 mehr. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Säulen ist gleich. Zwischen zwei dieser Säulen wird ein Tor eingebaut.

Wie hoch sind die Kosten, wenn

1 m Zaun	9,50 MDN	
1 Säule	11,00 MDN	
und das Tor	64,00 MDN	kosten?

Die Dicke der Säulen wird dabei nicht berücksichtigt.

Aufgabe 040624:

Fritz gibt Heinz folgendes Rätsel auf:

"In unserer Klasse können 26 Schüler radfahren und 12 Schüler schwimmen. Jeder Schüler kann mindestens eins von beiden. Multipliziert man die Schülerzahl mit 5, so ist die Quersumme dieses Produkts doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar.
Wieviel Schüler besuchen die Klasse?"

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050611:

Aus Leipzig und Dresden (Entfernung 119 km) fahren gleichzeitig zwei Radfahrer ab. Der Radfahrer aus Leipzig fährt nach Dresden, der aus Dresden nach Leipzig. Der eine von ihnen legt 15 km, der andere 20 km in der Stunde zurück.

a) Wie groß ist die Entfernung zwischen beiden Radfahrern nach $2\frac{1}{2}$ Stunden?

b) Wie weit sind sie von beiden Städten entfernt, wenn sie einander treffen?

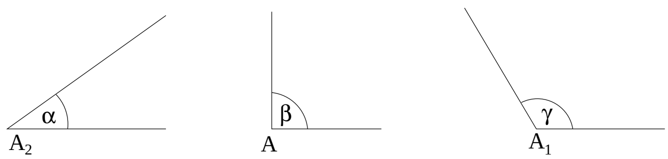
Aufgabe 050612:

Eine zweistellige natürliche Zahl soll auf Grund folgender Bedingungen ermittelt werden:

Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu der dadurch entstehenden Zahl die Zahl 1, so erhält man das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

Aufgabe 050613:

Gegeben sind die Winkel α, β und γ (siehe Abbildung)



a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!

b) Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 050614:

In einem Betrieb sollen 1 600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden. Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

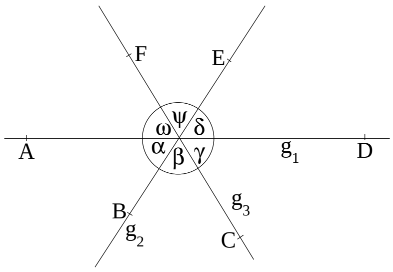
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050621:

In einer Möbelfabrik wurde die Produktion von Tischen monatlich um 10 Tische gesteigert. Die Jahresproduktion betrug 1 920 Tische.

Wieviel Tische wurden im Juni und wieviel im Dezember hergestellt?

Aufgabe 050622:



Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 schneiden einander im Punkt M. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen α, β, γ, δ, ψ und ω (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn

(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und

(2) α dreimal so groß wie β ist?

Aufgabe 050623:

Gesucht ist eine natürliche Zahl b, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) $40 < b < 600$;

(2) b ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,

(3) b ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,

(4) b läßt bei der Division durch 11 den Rest 6.

Wieviel solche Zahlen gibt es?

Aufgabe 050624:

Die Schüler Eva, Renate, Monika, Ingrid, Jürgen, Hans und Gerd haben sich in einer Reihe der Größe nach aufgestellt. Der größte steht vorn, und von zwei gleichgroßen steht der, dessen Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor dem anderen. Folgendes ist bekannt:

(1) Es ist wahr, daß Ingrid 2 cm kleiner als Monika ist.

(2) Es ist falsch, daß Eva nicht dieselbe Größe wie Gerd besitzt.

(3) Es ist nicht wahr, daß keiner dieser Schüler kleiner als Hans ist.

(4) Es ist wahr, daß Jürgen kleiner als Ingrid, aber größer als Hans ist.

(5) Es ist unwahr, daß Hans größer als Monika ist.

(6) Es ist nicht falsch, daß Monika 2 cm größer als Gerd und auch größer als Jürgen ist.

Es soll festgestellt werden:

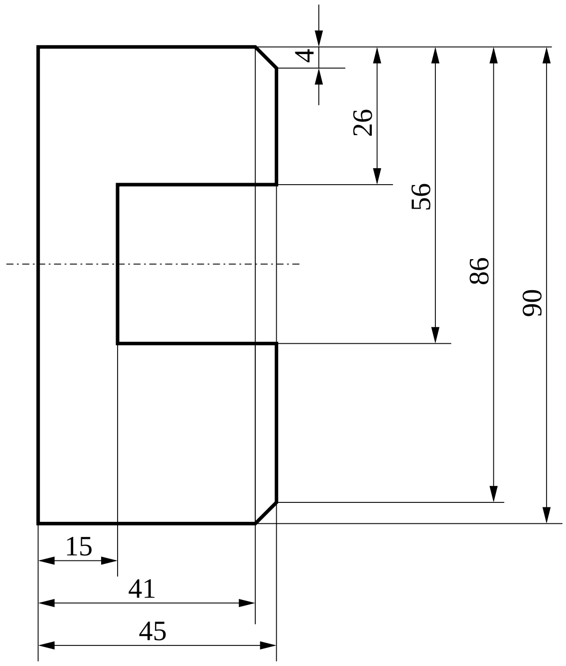
a) Welche Schüler sind gleich groß?

b) Wie lautet die Reihenfolge der Vornamen, in der sich die Schüler aufgestellt haben? (Man beginne beim größten Schüler.)

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060611:



Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)

Aufgabe 060612:

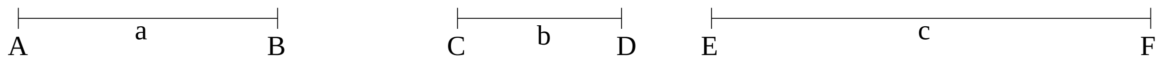
Zu Beginn des Schuljahres kaufte Heinz zwei verschiedene Sorten von Heften, die eine kostet 8 Pf, die andere 15 Pf pro Stück. Er zahlte für 12 Hefte zusammen 1,31 MDN.

Wieviel Hefte kaufte er von jeder Sorte?

Aufgabe 060613:

Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).

Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (a + 3b - 2c)$!



Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 060614:

In einem Haus wohnen genau die Mietsparteien Albrecht, Becker, Conrad, Dietrich, Ermler, Fritsche, Geißler, Hamann, Ilgner, Keies, Lorenz, Männig, Nolte, Oswald, Richter und Pätzold. Im Erdgeschoß und in jeder Etage wohnen genau zwei Mietsparteien, außerdem ist folgendes bekannt:

Albrechts wohnen zwei Stockwerke tiefer als Beckers.

Beckers wohnen sechs Stockwerke höher als Conrads.

Familie Fritsche wohnt neben Familie Geißler.

Familie Männig wohnt vier Stockwerke höher als Familie Nolte und zwei Stockwerke tiefer als Familie Fritsche.

Ein Stockwerk über Familie Nolte wohnt Familie Oswald.

Familie Albrecht wohnt drei Etagen über Familie Richter,

und Familie Pätzold wohnt fünf Stockwerke unter Familie Geißler.

a) Wieviel Stockwerke hat das Haus?

b) In welchem Stockwerk wohnt Familie Albrecht?

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060621:

Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke.

Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

Aufgabe 060622:

Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:

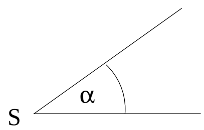
(1) $100 < a < 1\,201$,

(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,

(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,

(4) a läßt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

Aufgabe 060623:



Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99 beträgt!

Aufgabe 060624:

Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.

Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.

Ermittle die Breite dieser Terrasse!

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

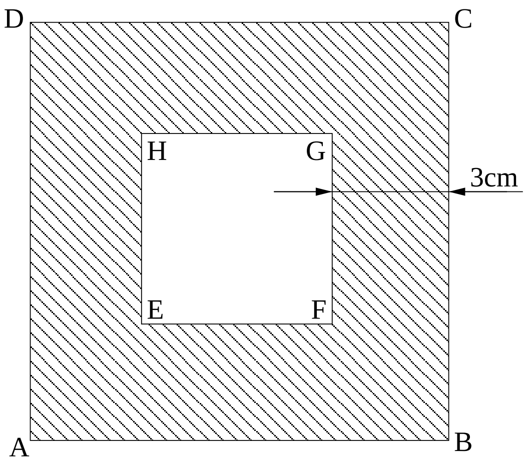
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070611:

Zu einem Straßenbahnhof einer gewissen Großstadt gehören insgesamt 83 Straßenbahnwagen. Davon sind genau 46 Anhänger. Zu einem gewissen Zeitpunkt befinden sich insgesamt 8 Triebwagen mit je zwei Anhängern und 23 Triebwagen mit je einem Anhänger im Einsatz.

Welches ist die Anzahl aller Triebwagen und Anhänger, die sich zu diesem Zeitpunkt nicht im Einsatz befinden?

Aufgabe 070612:



Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, daß die vier Diagonalen AC, BD, EG und FH einander in genau einem Punkt schneiden, und daß $AB \parallel EF$ gilt.

Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt $96\,\text{cm}^2$.

Berechne die Längen der Strecken BC und GH!

Aufgabe 070613:

In einem Speicher wurden insgesamt 2170 kg Getreide gelagert. Es waren genau 11 Sack Weizen zu je 80 kg, 6 Sack Gerste und 12 Sack Mais. Jeder Sack Gerste enthielt 5 kg mehr als jeder Sack Mais.

Wieviel Kilogramm Mais wurden im Speicher gelagert?

Aufgabe 070614:

Unter der Fakultät einer natürlichen Zahl $n \geq 2$ (geschrieben $n!$) verstehen wir das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Es gilt zum Beispiel:

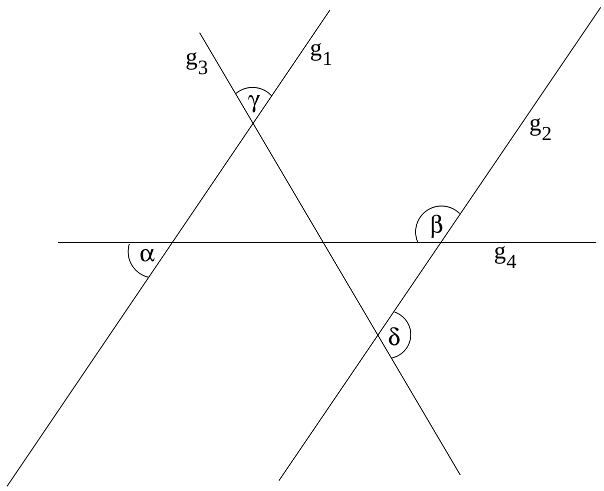
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Ermittle, auf welche Ziffer die Summe $s = 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ endet!

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070621:



Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei

$$\alpha = 50°, \qquad \beta = 130°, \qquad \gamma = 70°.$$

Ermittle δ!

Aufgabe 070622:

Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.

Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muß, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

Aufgabe 070623:

Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schießleistungen. Es ergab sich folgendes:

(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.

(2) Elke und Regina erreichten zusammen dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.

(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.

Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

Aufgabe 070624:

Von den Teilnehmern einer Schule eines Landkreises an der 1. Stufe der Mathematikolympiade wurden genau $\frac{3}{40}$ zur 2. Stufe delegiert. Von diesen Schülern erhielten bei der 2. Stufe (Kreisolympiade) genau $\frac{2}{9}$ Preise oder Anerkennungsschreiben.

Einen ersten Preis in seiner Klassenstufe erhielt genau ein Schüler, genau ein weiterer Schüler erhielt in seiner Klassenstufe einen zweiten Preis, genau zwei weitere bekamen dritte Preise. Außerdem wurden genau vier anderen Schülern dieser Schule für besonders gute Lösungen einer Aufgabe Anerkennungsschreiben überreicht.

Gib die Anzahl aller Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade an!

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080611:

Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt $3\,000\,\mathrm{m}^2$. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?

b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2 000!

Aufgabe 080612:

Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!

Aufgabe 080613:

In einem Ferienlager "Junger Mathematiker" kauft Rainer während einer Pause in der Lagerkantine für seine Freunde folgende Waren ein: 13 Flaschen Limonade zu je 0, 21 M, sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen.

Rainer soll insgesamt 10, 43 M bezahlen. "Das kann nicht stimmen", sagt er. Dabei wußte er noch gar nicht, wieviel jedes Lachsbrötchen kostet.

Weshalb konnte er seiner Behauptung trotzdem sicher sein?

Aufgabe 080614:

Von drei Pionieren einer Klasse ist uns folgendes bekannt:

(1) Sie haben die Vornamen Alex, Bodo und Dietmar.

(2) Ihre Familiennamen lauten Neumann, Siebert und Keller. Dabei braucht die Reihenfolge der Vornamen nicht der Reihenfolge der Familiennamen zu entsprechen.

(3) Alex heißt nicht Neumann.

(4) Der Pionier mit dem Familiennamen Keller ist älter als der Pionier mit dem Vornamen Bodo.

(5) Die Mutter des Pioniers Neumann ist eine geborene Mittag.

(6) Die Mutter Bodos trägt den Geburtsnamen Rößler.

Ermittle die Familiennamen, die den Vornamen der Pioniere zugeordnet sind!

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080621:

In einer 6. Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik kein Schüler die Note 5, jeder neunte die Note 1, jeder dritte die Note 2 und jeder sechste die Note 4. Über die Schülerzahl n dieser Klasse ist folgendes bekannt: 20 < n < 40.

Berechne die Anzahl der Schüler, die als Jahresendzensur die Note 3 erhielten!

Aufgabe 080622:

Während der Sommerferien besuchte Monika die Hauptstadt der UdSSR. Für ihre Mathematikarbeitsgemeinschaft brachte sie unter anderem folgende Aufgabe mit:

Im "Gorki"-Ring der Moskauer Untergrundbahn befinden sich vier Rolltreppen von unterschiedlicher Länge. Die Gesamtlänge der beiden Rolltreppen mittlerer Länge beträgt 136 m, wobei die Länge der einen um 8 m größer ist als die der anderen. Die Länge der längsten Rolltreppe beträgt $\frac{3}{10}$ und die der kürzesten $\frac{3}{14}$ von der Gesamtlänge aller vier Rolltreppen.

Berechne die Länge jeder einzelnen Rolltreppe!

Aufgabe 080623:

Über der Seite CD eines Quadrates $ABCD$ mit $\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ ist ein gleichseitiges Dreieck ΔDCE so zu konstruieren, daß das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben. Der Punkt E des Dreiecks ΔDCE sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen.

Verbinde E mit A und mit B!

Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle AEB$!

Aufgabe 080624:

Drei Freunde bereiten sich auf die "Kleine Friedensfahrt" vor. Sie trainieren auf einer Rundstrecke. Ihr Start erfolgt zur gleichen Zeit und in gleicher Richtung an der Startlinie S. Manfred legte die erste Runde in genau 3 Minuten, Klaus in genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut in genau 5 Minuten zurück.

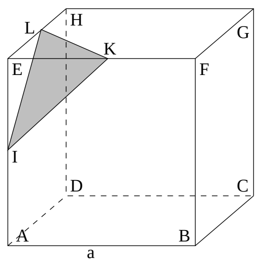
a) Nach wieviel Minuten würden die drei Freunde erstmalig die Startlinie S wieder gleichzeitig erreichen, wenn wir annehmen, daß Manfred für alle weiteren Runden je Runde genau 3 Minuten, Klaus genau $3\frac{3}{4}$ Minuten und Helmut genau 5 Minuten brauchten?

b) Wieviel Runden hätte jeder von ihnen bis dahin zurückgelegt?

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090611:



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist.

Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

Aufgabe 090612:

In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$$1\frac{1}{2} \text{ Hühner legen in } 1\frac{1}{2} \text{ Tagen } 1\frac{1}{2} \text{ Eier.}$$

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

Aufgabe 090613:

In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden.

In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet. Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor.

Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

Aufgabe 090614:

Eine Arbeitsgemeinschaft erhielt als Auszeichnung für sehr gute Leistungen einen Betrag von genau 240, – M. Bei gleichmäßiger Verteilung dieses Geldes auf alle Mitglieder der Arbeitsgemeinschaft hätte jedes Mitglied einen ganzzahligen Betrag (in Mark) erhalten. Die Mitglieder beschlossen jedoch, die 240, – M gemeinsam auf einer Wanderfahrt auszugeben.

Genau drei der Mitglieder konnten an der Wanderfahrt nicht teilnehmen, infolgedessen standen bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Teilnehmer der Wanderfahrt für jeden Teilnehmer genau 4, – M mehr zur Verfügung als bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Mitglieder.

Ermittle die Mitgliederzahl der Arbeitsgemeinschaft!

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090621:

Klaus nahm als Mitglied der Sektion Radsport einer Betriebssportgemeinschaft an einem Bahnrennen teil. Nach dem Rennen wurde Klaus von seinem Bruder Reiner nach dem Ausgang des Rennens gefragt. Klaus sagte:

"Als ich den Zielstrich überfuhr, war kein Fahrer neben mir; genau ein Drittel der beteiligten Fahrer hatte das Ziel schon erreicht, und genau die Hälfte aller Teilnehmer lag noch hinter mir."

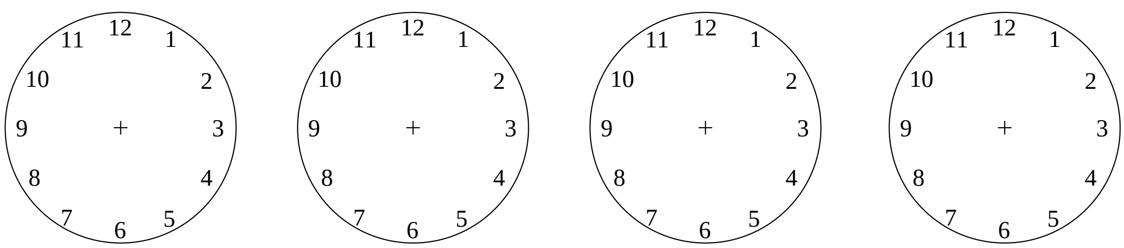
Gib an, welchen Platz Klaus in diesem Rennen belegte und wieviel Fahrer insgesamt an dem Rennen teilnahmen!

Aufgabe 090622:

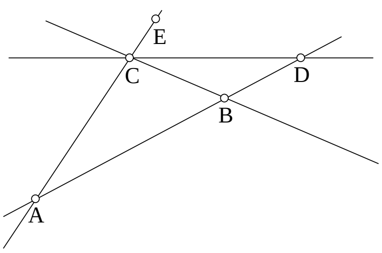
Auf der Abbildung sind wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr die Zahlen 1 bis 12 abgebildet.

Untersuche, ob sich diese vier Kreisscheiben durch Einzeichnen von Linien (z.B. Geraden), die keine der Ziffern treffen, so in Teilstücke zerlegen lassen, daß die Summen der auf jedem Teilstück derselben Kreisscheibe liegenden Zahlen jeweils untereinander gleich sind!

Dabei ist die erste Kreisscheibe in 2 Teile, die zweite in 3 Teile, die dritte in 4 Teile und die vierte in 6 Teile zu zerlegen.



Aufgabe 090623:



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht. Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge, Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, daß C zwischen A und E liegt.

Ferner gelte $\sphericalangle ECD \approx \sphericalangle ABC$.

Beweise, daß $\sphericalangle BCD \approx \sphericalangle BAC$ ist!

Aufgabe 090624:

Jürgen und seine jüngere Schwester Elke haben den gleichen Schulweg. Elke braucht vom Elternhaus bis zum Schultor genau 30 Minuten, Jürgen genau 20 Minuten. An einem Tage ging Elke genau 5 Minuten vor Jürgen aus dem Haus.

Nach wieviel Minuten holte Jürgen seine Schwester ein? (Es sei angenommen, daß jeder von beiden mit gleichbleibender Geschwindigkeit ging.)

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

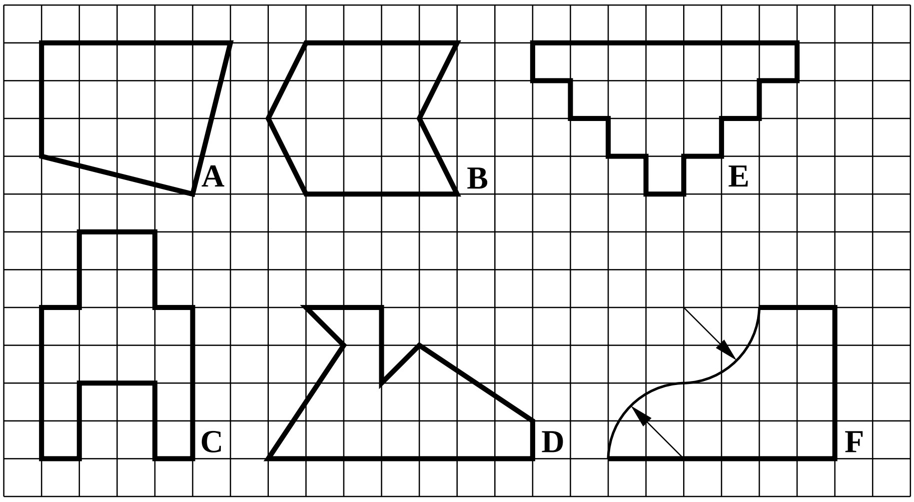
Aufgabe 100611:

Eine LPG hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten insgesamt 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt.

Welches von den beiden Feldern hat den größeren Flächeninhalt? Um wieviel Ar unterscheiden sich die beiden Flächen?

Aufgabe 100612:

Untersuche, welche der in der Abbildung dargestellten Figuren A bis F sich auf wenigstens eine Weise durch einen einzigen geraden Schnitt so in zwei Teilflächen zerlegen läßt, daß sich diese beiden zur gleichen Figur gehörenden Teilflächen jeweils zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen!



Als Lösung genügt in den Fällen, in denen eine Zerlegung der genannten Art möglich ist, je eine entsprechende Zeichnung oder die jeweils zum Quadrat zusammengesetzten aufgeklebten Teilflächen. In den Fällen dagegen, in denen eine Zerlegung und Zusammensetzung der genannten Art nicht möglich ist, genügt als Lösung eine entsprechende Angabe (ohne Begründung).

Aufgabe 100613:

Es seien a, b, c, d, e, f, g, h sämtlich paarweise untereinander verschiedene einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, und es gelte:

$$a + b = 10, \qquad c + d + e = 16, \qquad f + g + h = 14.$$

Welche einstellige natürliche Zahl (ungleich Null) wurde in diesen drei Aufgaben nicht verwendet? Gib für a, b, c, d, e, f, g, h eine mögliche Lösung an!

Aufgabe 100614:

An 15 Teilnehmer am Wettbewerb der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" wurden insgesamt 25 Antwortkarten "sehr gut gelöst" von der Redaktion geschickt, und zwar erhielt jeder dieser Teilnehmer mindestens eine solche Antwortkarte.

Außerdem ist über diese 15 Teilnehmer bekannt, daß mindestens ein Teilnehmer genau 2 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 3 Antwortkarten, mindestens ein Teilnehmer genau 4 Antwortkarten und mindestens ein Teilnehmer genau 5 Antwortkarten erhielt. An einige der 15 Teilnehmer wurde je genau eine Antwortkarte geschickt.

Ermittle die Anzahl dieser Teilnehmer!

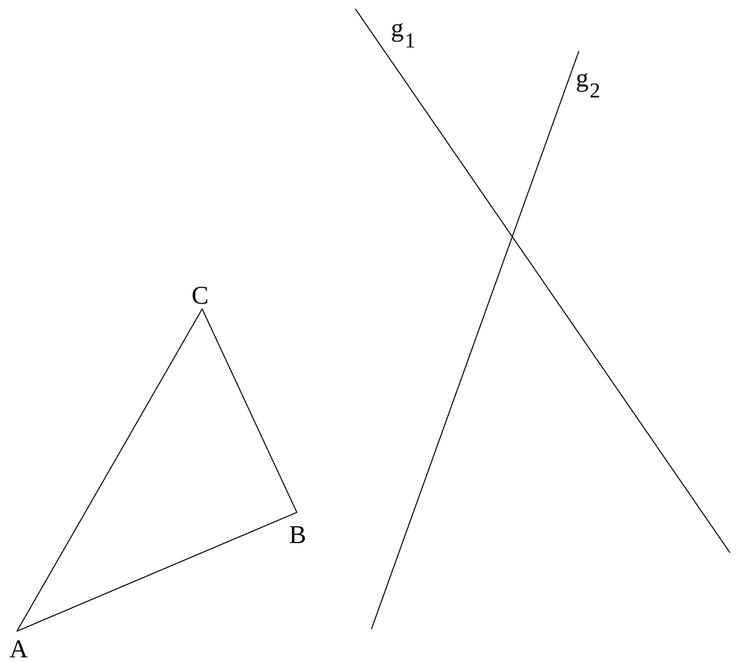
10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100621:

Die Abbildung zeigt ein Dreieck ΔABC und zwei Geraden g_1 und g_2. Das Dreieck ΔABC soll nacheinander an den Geraden g_1 und g_2 gespiegelt werden.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\Delta A_2B_2C_2$! (Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)



Aufgabe 100622:

Die sowjetischen Raumschiffe Sojus 6, Sojus 7 und Sojus 8 umkreisten im Gruppenflug die Erde. Dabei brauchte die Gruppe der drei Raumschiffe für jede Umkreisung durchschnittlich 88 Minuten und legte in dieser Zeit rund 41 000 km zurück.

Berechne die Länge des Weges, den die Raumschiffgruppe während ihres Fluges durchschnittlich

a) in jeder Stunde,

b) in jeder Sekunde zurücklegte!

Bei der Aufgabe a) soll die Angabe in Kilometern erfolgen und auf volle Tausend Kilometer gerundet werden, bei Aufgabe b) soll die Angabe in Metern erfolgen und auf volle Hundert Meter gerundet werden.

Aufgabe 100623:

In der fünfstelligen Zahl

$$5\ 2 * 2 *$$

sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, daß die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist.

Gib alle Möglichkeiten hierfür an!

(*Beachte:* Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

Aufgabe 100624:

Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, daß sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.

Gib eine Möglichkeit hierfür an!

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110611:

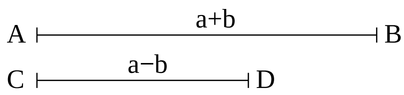
Von zwei Autos vom Typ ”Wartburg” legte das eine eine Strecke von 1 200 km zurück, das andere eine Strecke von 800 km. Es sei angenommen, daß jedes der beiden Autos für jeden Kilometer die gleiche Menge Kraftstoff verbrauchte. Dabei verbrauchte das zweite Auto 36 Liter Kraftstoff weniger als das erste.

Berechne, wieviel Liter Kraftstoff beide Autos zusammen für die oben angegebenen Strecken verbrauchten!

Aufgabe 110612:

Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a + b$, die zweite die Länge $a - b$.

Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!



Aufgabe 110613:

Vier Flächen eines Holzwürfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die beiden übrigen bleiben ohne Anstrich. Danach wird der Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.

Ermittle von diesen kleinen Würfeln die Anzahl derjenigen, die

keine rot angestrichene Fläche,

genau eine rot angestrichene Fläche,

genau zwei rot angestrichene Flächen,

genau drei rot angestrichene Flächen besitzen!

Unterscheide dabei die folgenden Fälle:

a) Die nicht angestrichenen Flächen haben keine gemeinsame Kante.

b) Die nicht angestrichenen Flächen haben eine gemeinsame Kante.

Als Lösung genügt die Angabe der Anzahlen ohne Begründung.

Aufgabe 110614:

Zwei Orte A und B seien durch eine 999 km lange Straße miteinander verbunden.

Im Abstand von jeweils 1 km seien auf dieser Straße Kilometersteine aufgestellt, die beidseitig derart beschriftet sind, daß auf der einen Seite jedes Steines seine Entfernung von A und auf der anderen Seite seine Entfernung von B in km angegeben ist. Z.B. trägt der Stein am Ortsausgang von A die Beschriftung 0 und 999, der Stein am Ortseingang von B die Beschriftung 999 und 0.

Ermittle von diesen Steinen die Anzahl derjenigen, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden (z B. 722 und 277)!

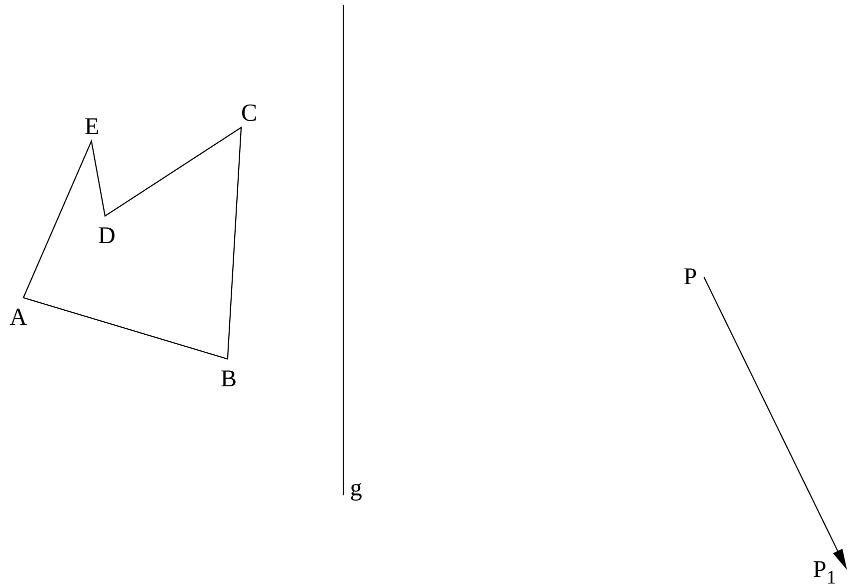
11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110621:

Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 110622:

Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen. Außerdem ist bekannt:

(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.

(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.

(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.

Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

Aufgabe 110623:

Von dem berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) stammt folgende Aufgabe:

Zerlege die Zahl 25 so in zwei Summanden, daß der größere Summand 49 mal so groß ist wie der kleinere Summand.

Hinweis: Die Summanden brauchen nicht natürliche Zahlen zu sein.

Aufgabe 110624:

Wenn man ein Drittel von Rainers Spargeld zu einem Fünftel dieses Spargeldes addiert, dann ist die Summe genau 7 Mark mehr als die Hälfte seines Spargeldes.

Wieviel Mark hat Rainer hiernach insgesamt gespart?

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120611:

Von 30 Schülern einer Klasse lesen regelmäßig 20 Schüler die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen" (Frösi), 12 Schüler die mathematische Schülerzeitschrift "alpha" und 6 Schüler weder "Frösi" noch "alpha".

Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Klasse, die beide Zeitschriften lesen!

Aufgabe 120612:

Ein Betrieb will unter Verwendung des gleichen Uhrwerks Uhren verschiedener Ausführung herstellen. Zu diesem Zwecke stehen sechs verschiedene Gehäuseausführungen, vier verschiedene Ausführungen von Zifferblättern und drei verschiedene Zeigerausführungen zur Verfügung.

Gib die Anzahl aller verschiedenen Ausführungen von Uhren an, die sich unter diesen Umständen herstellen lassen!

Aufgabe 120613:

In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A:	$15\,\text{m}^2$	Maschine D:	$60\,\text{m}^2$
Maschine B:	$5\,\text{m}^2$	Maschine E:	$18\,\text{m}^2$
Maschine C:	$18\,\text{m}^2$	Maschine F:	$50\,\text{m}^2$

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

An der Maschine A:	$14\,\text{m}^2$	An der Maschine D:	$21\,\text{m}^2$
An der Maschine B:	$6\,\text{m}^2$	An der Maschine E:	$13\,\text{m}^2$
An der Maschine C:	$15\,\text{m}^2$	An der Maschine F:	$17\,\text{m}^2$

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m^2) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, daß die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als "Gesamtlänge der Transportwege" bezeichnen.

   Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

Aufgabe 120614:

Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, daß eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

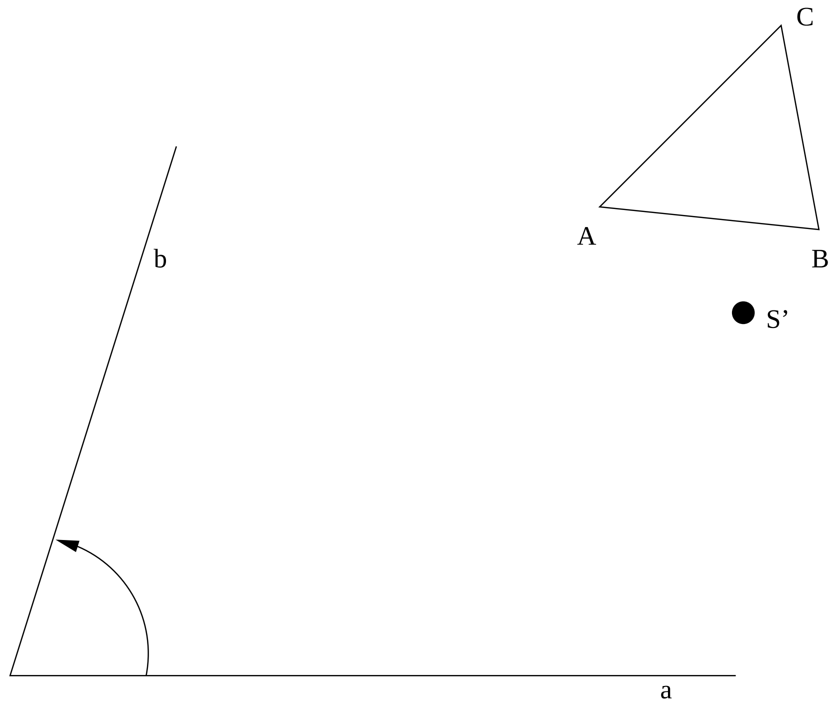
12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120621:

Das abgebildete Dreieck ΔABC ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\sphericalangle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $\Delta A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 120622:

An 11 Werktätige eines volkseigenen Betriebes wurden für insgesamt 2 650 M Prämien in Höhe von 150 M, 250 M, 350 M, 400 M und 500 M vergeben, wobei jede Prämienstufe mindestens einmal vorkam.

Ermittle die Anzahl aller Werktätigen, die mit je 150 M ausgezeichnet wurden!

Aufgabe 120623:

Nach einer Solidaritätssammlung für Vietnam verglichen die Thälmann-Pioniere Rita, Werner, Margot, Beate und Jan ihre Sammelergebnisse. Dabei stellten sie fest:

(1) Beate hatte mehr als Jan, jedoch weniger als Werner gesammelt.

(2) Rita sammelte 13 M, das war weniger, als Jan gesammelt hatte.

(3) Beates Sammelergebnis war um 4 M höher als das Ergebnis Ritas.

(4) Margot sammelte zwar 2 M weniger als Werner, aber 1 M mehr als Jan.

(5) Zwei Pioniere erzielten das gleiche Sammelergebnis.

Stelle fest, welches Sammelergebnis jeder der fünf Pioniere erzielt hatte.

Aufgabe 120624:

Manfred berichtete im Zirkel Junger Mathematiker von einem Besuch des Rostocker Überseehafens:

”Ich habe dort insgesamt 21 Schiffe aus fünf verschiedenen Ländern gesehen. Die Anzahl der Schiffe aus der DDR war halb so groß wie die aller im Hafen liegenden ausländischen Schiffe. Diese kamen aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland sowie aus Indien. Dabei war die Anzahl der sowjetischen Schiffe um zwei größer als die der bulgarischen, diese wieder um eins größer als die der finnischen, diese schließlich um zwei größer als die der indischen Schiffe.”

Ermittle die Anzahl der Schiffe aus der DDR, aus der Sowjetunion, der Bulgarischen Volksrepublik, aus Finnland und aus Indien, die Manfred in Rostock gesehen hat!

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130611:

Eine Strecke von 7 m Länge soll so in vier Teile geteilt werden, daß die zweite Teilstrecke 40 cm länger als die erste, die dritte 40 cm länger als die zweite und die vierte 40 cm länger als die dritte ist.

Untersuche, ob eine solche Einteilung möglich ist, und gib, wenn dies der Fall ist, die Längen jeder der vier Teilstrecken an!

Aufgabe 130612:

Für die "Galerie der Freundschaft" ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.

Ermittle den Flächeinhalt dieses Rahmens!

Aufgabe 130613:

2				
	8			
	11	16		

In die leeren Felder des abgebildeten Quadrats sind Zahlen so einzutragen, daß die eingetragenen Zahlen, von links nach rechts gelesen und auch von oben nach unten gelesen, immer größer werden und daß dabei für jede Zeile und für jede Spalte folgendes gilt: Alle Differenzen, die man in dieser Zeile bzw. in dieser Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, haben einen für diese Zeile bzw. Spalte einheitlichen Wert.

Dabei heiße "Differenz": "rechte Zahl minus linke Zahl" bzw. "untere Zahl minus obere Zahl".

Gib ferner für jede Zeile und für jede Spalte die für sie charakteristische Differenz an!

Aufgabe 130614:

Jörg und Claudia streiten sich darüber, ob es unter den natürlichen Zahlen von 0 bis 1000 mehr solche gibt, bei deren dekadischer Darstellung (mindestens) eine 5 vorkommt, als solche, bei denen das nicht der Fall ist. Stelle fest, wie die richtige Antwort auf diese Frage lautet!

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130621:

Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.

Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann? Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

Aufgabe 130622:

Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, daß der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte u.s.w., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d.h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).

Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d.h. nicht verdeckt) sind!

Aufgabe 130623:

Klaus hat gehört, daß in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note "5" bekam. Ein Sechstel der Klasse schrieb eine "1", ein Drittel eine "2" und nur ein Neuntel eine "4". Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wußte Klaus nur, daß sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wieviel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine "3" geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist! Wenn das nicht der Fall ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

Aufgabe 130624:

Werner schreibt 50*0*05 an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen * eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, daß eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.

Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140611:

2^6	2^2	2^7
e	b	2^4
d	c	a

In der abgebildeten Tabelle sind statt der Buchstaben a, b, c, d, e Zweierpotenzen so einzutragen, daß die aus den drei Zweierpotenzen jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen gebildeten Produkte jeweils einander gleich sind.

Beweise, daß es genau eine Möglichkeit für eine derartige Eintragung gibt, und nenne diese Eintragung!

Aufgabe 140612:

Bernd und Monika unterhalten sich über die letzte Zusammenkunft ihrer Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker, bei der genau 6 Jungen mehr anwesend waren als Mädchen. Bernd meint, daß bei dieser Veranstaltung von den 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt hätten. Monika entgegnet nach einigem Überlegen, daß das nicht stimmen könne.

Wer von beiden hat recht?

Aufgabe 140613:

Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 12 km zurück. Ein zweiter Radfahrer, der denselben Weg von A nach B ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit fuhr, startete am selben Tag um 7.00 Uhr in A und legte in jeder Stunde 15 km zurück. Er traf mit dem ersten Radfahrer zur gleichen Zeit in B ein.

a) Um wieviel Uhr holte der zweite Radfahrer den ersten ein?

b) Wie lang ist der Weg von A nach B?

Aufgabe 140614:

Jemand schreibt 3 * 6 * 5 und möchte dann die Sternchen * so durch Ziffern ersetzen, daß eine fünfstellige durch 75 teilbare Zahl entsteht.

Ermittle alle fünfstelligen, durch 75 teilbaren Zahlen, die unter diesen Bedingungen entstehen können!

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

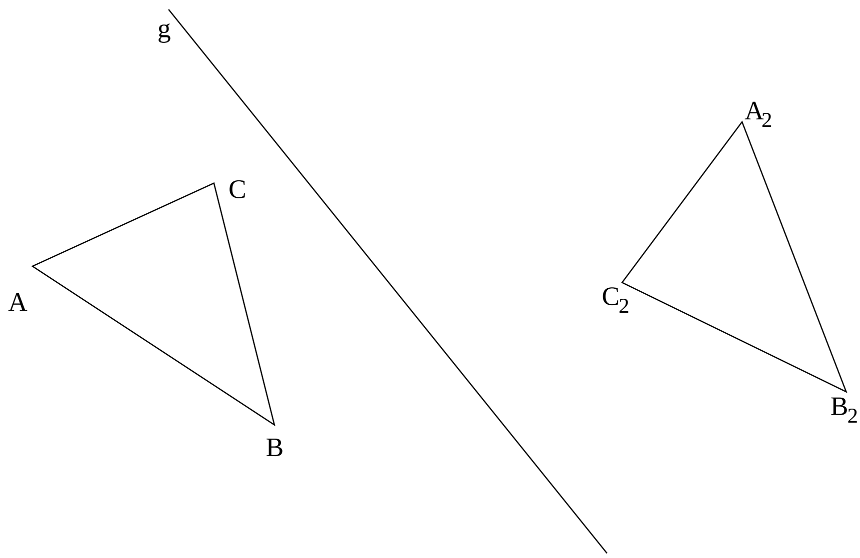
Aufgabe 140621:

Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:

Zunächst wurde ΔABC an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\Delta A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, daß $\Delta A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.

Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\Delta A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Aufgabe 140622:

Klaus behauptet, eine von ihm aufgeschriebene natürliche Zahl z habe folgende Eigenschaften:

(1) Vertauscht man zwei geeignete Ziffern von z miteinander, so ist die auf diese Weise entstehende Zahl z' um 198 größer als z.

(2) Die Summe aus z und z' beträgt 13 776.

Stelle fest, ob es genau eine Zahl z mit den von Klaus genannten Eigenschaften gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Aufgabe 140623:

Anita, Brigitte, Christa und Dana trugen untereinander einen Wettkampf aus. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, wurden folgende drei Aussagen gemacht:

(1) Anita siegte, Brigitte belegte den zweiten Platz.

(2) Anita belegte den zweiten Platz, Christa den dritten.

(3) Dana belegte den zweiten, Christa den vierten Platz.

Wie sich herausstellte, wurde in jeder der drei Aussagen (1), (2), (3) eine Plazierung richtig und eine falsch angegeben.

Wer belegte den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz?

Aufgabe 140624:

Ein Radfahrer fuhr mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf einer Straße von A nach B. Er startete in A um 6.00 Uhr und legte in jeder Stunde 14 km zurück. Ein zweiter Radfahrer fuhr auf derselben Straße mit gleichbleibender Geschwindigkeit von B nach A. Er startete am selben Tag um 8.00 Uhr in B und legte in jeder Stunde 21 km zurück.

Beide Radfahrer begegneten sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B.

Um wieviel Uhr begegneten sie sich? Wie lang ist die Strecke von A nach B?

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150611:

Die Volksrepublik Polen lieferte vom 6. Dezember 1974 (erster Liefertag) bis zum 18. Dezember 1974 (letzter Liefertag) eine Gesamtmenge von 132 000 t Steinkohle und 24 000 t Koks auf dem Wasserwege in die Hauptstadt der DDR. Die Lieferung erfolgte auf Schleppkähnen mit einem Fassungsvermögen von je 600 t.

Wieviel dieser Kahnladungen trafen im angegebenen Zeitraum durchschnittlich an jedem Tag in Berlin ein (wobei Sonntage als Liefertage mitgerechnet seien)?

Aufgabe 150612:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{b} \\ - & & & & - \\ \boxed{c} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{d} \\ \cline{1-1}\cline{5-5} \boxed{e} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{a} \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind in die Kästchen statt der Buchstaben Ziffern so einzusetzen, daß alle fünf angegebenen Aufgaben richtig gelöst sind.

Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Als Lösung genügt nicht, wie bei solchen "Zahlenrätseln" sonst üblich, die Angabe von gesuchten Zahlen. Es muß nachgewiesen werden, daß die angegebenen Zahlen alle gestellten Forderungen erfüllen und daß sie die einzigen Zahlen sind, die das tun.

Aufgabe 150613:

Im Jahre 1770 gab der Schweizer Mathematiker LEONARD EULER ein Lehrbuch der Algebra heraus, das mehr als 100 Jahre lang zu den meistgelesenen Algebrabüchern gehörte. Eine Aufgabe aus diesem Lehrbuch lautet:

> Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere der beiden Summanden 49 mal so groß ist wie der andere.
>
> Untersuche, ob eine solche Zerlegung möglich ist, und ermittle, wenn dies der Fall ist, die beiden dabei auftretenden Summanden!

Aufgabe 150614:

Eine Pioniergruppe sammelt Altpapier. Bei der Abrechnung stellte sich heraus, daß das Sammelergebnis der letzten beiden Tage ein Viertel der insgesamt erreichten Menge betrug, und zwar waren am letzten Tag 27 kg gesammelt worden und am vorletzten Tag 6 kg weniger als am letzten Tag.

Wieviel Kilogramm betrug die insgesamt gesammelte Menge Altpapier?

15. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150621:

Ein sowjetischer Hubschrauber vom Typ Mi-10 kann eine Nutzlast von 15 000 kp befördern. Bei einem Transport von Sperrgut mit drei Hubschraubern dieses Typs wurde der erste Hubschrauber zu $\frac{1}{3}$, der zweite zu $\frac{7}{8}$ und der dritte zu $\frac{3}{5}$ seiner Tragfähigkeit ausgelastet.

Ermittle das Gesamtgewicht des in diesem Transport von den drei Hubschraubern beförderten Sperrgutes!

Aufgabe 150622:

Das Wohnschiff "Kuhle Wampe", das im Berliner Stadtbezirk Köpenick ständig vor Anker liegt, beherbergt FDGB-Urlaubsgäste. Aus einem Prospekt ist ersichtlich, daß es insgesamt für 41 Urlauber Plätze bietet und daß diese Plätze sich in Zweibett- und Dreibettkabinen aufteilen.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Aufteilung der Plätze, die sich mit diesen Angaben vereinbaren lassen.

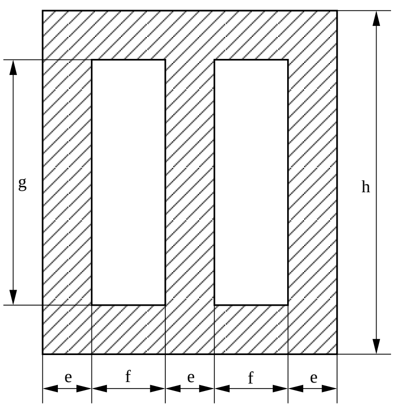
Aufgabe 150623:

Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von $6,4$ cm! Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D! Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h.

Spiegele den Kreis k an g und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!

Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

Aufgabe 150624:



Berechne den Inhalt A der schraffierten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,

b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160611:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{AAA} & \cdot & \mathrm{A} & = & \mathrm{BBB} \\ + & & & & - \\ \mathrm{CCC} & \cdot & \mathrm{E} & = & \mathrm{DDD} \\ \hline \mathrm{FFF} & : & \mathrm{F} & = & \mathrm{GGG} \end{array}$$

In diesem Schema sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle fünf angegegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

Ermittle alle möglichen derartigen Eintragungen!

Aufgabe 160612:

Knut ist ein sehr trainierter Radfahrer. Bei einem Ausflug legte er auf seinem Fahrrad in der Minute durchschnittlich 320 m zurück. Er fuhr um 7.00 Uhr mit seinem Rad ab und erreichte um 11.00 Uhr sein Ziel. Von 9.00 Uhr bis 9.20 Uhr hatte er gerastet, in der übrigen Zeit ist er ununterbrochen gefahren.

Wie lang (in km) ist die dabei von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke?

Aufgabe 160613:

Luise sucht eine natürliche Zahl x, die sie vom Zähler des Bruches $\frac{17}{19}$ subtrahieren und gleichzeitig zum Nenner dieses Bruches addieren möchte, wobei der so entstehende Bruch den Wert $\frac{7}{11}$ erhalten soll.

Stelle fest, ob es eine solche Zahl x gibt, ob sie die einzige ist, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und wie sie lautet!

Aufgabe 160614:

Eine Gruppe von mehr als 10, aber weniger als 50 Thälmann-Pionieren wollte eine Wanderfahrt durchführen. Sie brauchte dazu genau 91 Mark. Jeder Pionier der Gruppe zahlte eine einheitlich festgesetzte Anzahl von 1-Mark-Stücken (und keine weiteren Geldbeträge) in die Reisekasse. Ein dann noch fehlender Restbetrag von genau 26 Mark wurde aus der Pionierkasse bestritten.

Ermittle die Anzahl der Pioniere dieser Gruppe und den Betrag, den jeder von ihnen zur Bezahlung dieser Fahrt in die Reisekasse zahlte!

16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160621:

Ludwig sagt: "Ich kann die Leserzahl 58 125 der mathematischen Schülerzeitschrift "alpha" als Ergebnis der Additionsaufgabe

$$\begin{array}{cccccc} & A & L & P & H & A \\ + & & & H & E & I \\ + & & & T & E & R \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

erhalten, indem ich für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) einsetze, und zwar für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern, und wenn ich noch weiß, daß $I < R$ ist und die Ziffern $EHPL$ in dieser Reihenfolge hintereinander gelesen die Zahl 1976 ergeben.

Welche Ziffern sind für die Buchstaben einzusetzen, damit alle diese Angaben zutreffen?"

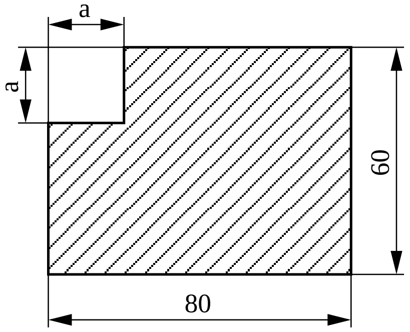
Überprüfe, ob die ermittelte Einsetzung alle Forderungen erfüllt, und ob es noch andere derartige Eintragungen gibt!

Aufgabe 160622:

In einem Pionierlager wurden in vier Räumen 65 Thälmann-Pioniere untergebracht. Der eine Raum hat 68 m^2 Bodenfläche, der zweite 76 m^2, der dritte 64 m^2 und der vierte 52 m^2. Die Pioniere wurden so untergebracht, daß auf jeden von ihnen die gleiche Anzahl von Quadratmetern Bodenfläche kam.

Ermittle für jeden der vier Räume die Anzahl der Thälmann-Pioniere, die jeweils untergebracht wurden!

Aufgabe 160623:



Die abgebildete schraffierte Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde. Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm^2.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

Aufgabe 160624:

Ein Kraftfuttergemisch für Zuchteber ist aus Haferschrot, Weizenkleie, Gerstenschrot, Mineralstoffen und Wasser zusammengesetzt, und zwar ist

die Hälfte des Gemischs Haferschrot,

$\frac{1}{10}$ des Gemischs ist Weizenkleie,

$\frac{1}{4}$ des Gemischs ist Gerstenschrot,

$\frac{1}{100}$ des Gemischs sind Mineralstoffe,

der Rest ist Wasser.

Berechne (in kg) den Anteil an Wasser, den 35 kg dieses Kraftfuttergemischs enthalten!

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170611:
In der DDR wurden folgende Mengen von Stickstoffdüngemitteln (in t) produziert

1950	1960	1970	1974
231 000	334 000	395 000	424 000

Dabei wurden die Ergebnisse von Jahr zu Jahr gesteigert.

Berechne, um wieviel Tonnen die Stickstoffdüngemittelproduktion im Durchschnitt jährlich gesteigert wurde:

a) von 1951 bis 1960

b) von 1961 bis 1970

c) von 1971 bis 1974!

Aufgabe 170612:
Von zwei Häfen A und B, die durch eine Schiffahrtsroute der Länge 240 km miteinander verbunden sind, legten gleichzeitig zwei Schiffe ab und fuhren auf dieser Route einander entgegen, jedes für sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Das eine entwickelte eine Geschwindigkeit von 18 km je Stunde. Nach fünfstündiger Fahrt waren die Schiffe einander noch nicht begegnet; jedoch betrug die Länge des zwischen ihnen liegenden Teils der Route nur noch 45 km.

Wieviel Kilometer legte das zweite Schiff durchschnittlich in jeder Stunde zurück?

Aufgabe 170613:
Jeder der 27 Pioniere der Klasse 6a sammelte durchschnittlich 5 Flaschen und 8 kg Altpapier. Für jede Flasche gab es 5 Pfennig und für je 1 kg Altpapier 15 Pfennig. Die Klasse 6b sammelte Altstoffe für insgesamt 25 M.

Reicht das so erworbene Geld für die gemeinsame Eisenbahnfahrt beider Klassen zum Wandertag, die 60 M kosten wird?

Aufgabe 170614:
Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.

(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher sprang als Ernst.

(3) Christian sprang genau so hoch wie Anton, aber höher als Ernst.

(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Schülers erreichte oder übertraf.

Ermittle die Reihenfolge der Sprunghöhen, die die Pioniere bei diesem Wettkampf erreichen! Beginne bei der Angabe der Reihenfolge mit dem Schüler, der die größte Sprunghöhe erreichte!

17. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170621:

Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.

Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

Aufgabe 170622:

Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden Klassenkameraden folgende Voraussagen:

(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.

(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.

(3) Es ist nicht wahr, daß Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.

(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.

Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, daß die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und daß alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren.

Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlauf?

Aufgabe 170623:

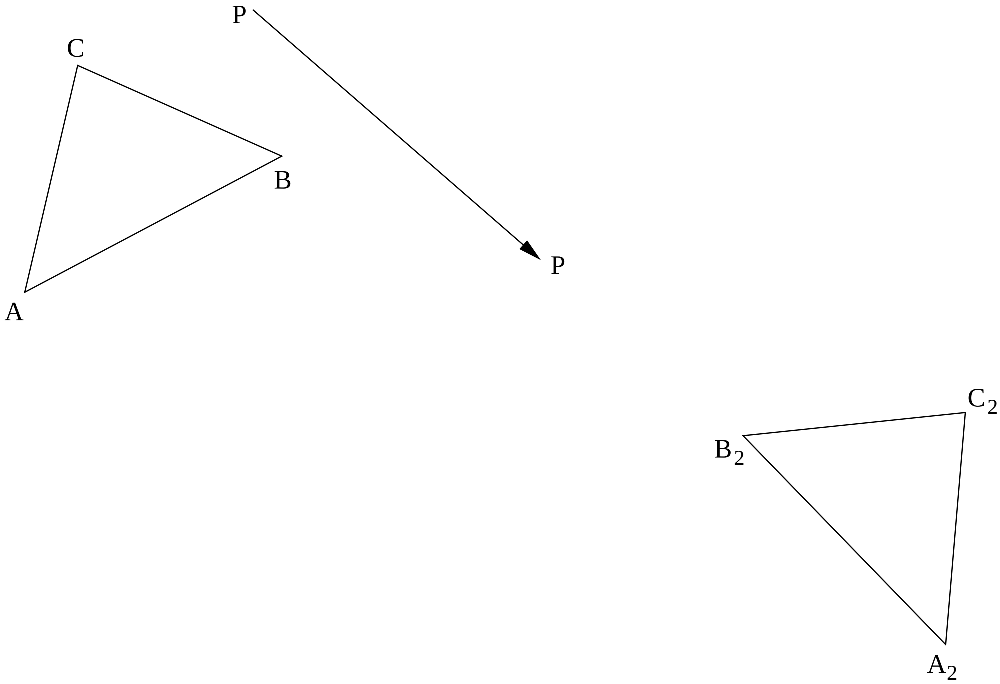
In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil. Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)

Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

Aufgabe 170624:

Auf der Abbildung sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft: Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.


P
C
B
P
A
C2
B2
A2

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180611:

In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert. Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung $55\,\text{m}^2$ Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung $67\,\text{m}^2$ Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat $80\,\text{m}^2$ Wohnfläche.

Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

Aufgabe 180612:

Eine Zahl z soll in der Gestalt $z = *3*6\,0$ geschrieben werden, wobei jeder Stern $(*)$ so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, daß z die beiden folgenden Eigenschaften hat:

(1) $60\,000 < z < 100\,000$,

(2) z ist durch 9 teilbar.

Ermittle alle Zahlen z, die diesen Bedingungen genügen!

Aufgabe 180613:

Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler. In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, daß drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften "alpha" und "technikus" lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a. Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den "technikus" als auch die Zeitschrift "alpha".

Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften "alpha" und "technikus"?

Aufgabe 180614:

Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er:

> "Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank."

Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.

Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

18. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180621:

a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.

   Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!

b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700 000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.

   Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Aufgabe 180622:

Ermittle alle zweistelligen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Einerziffer von z ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von z.

(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

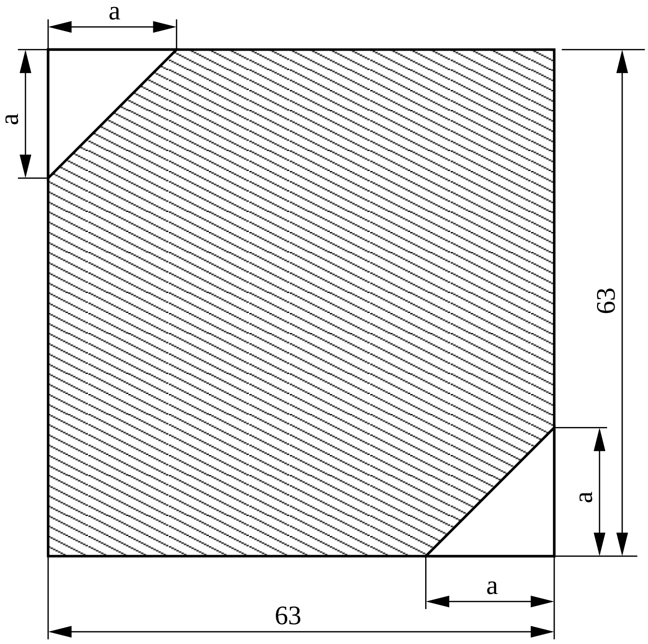
Aufgabe 180623:

In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.

Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt $10,50$ M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie $0,75$ M gespart. Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie $0,75$ M mehr bezahlen müssen.

Wieviel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

Aufgabe 180624:



Die abgebildete schraffierte Fläche ist $38\,\mathrm{cm}^2$ groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190611:

Von einem Busbahnhof fahren um 12.00 Uhr gleichzeitig vier Busse ab. Die Zeit, die jeweils bis zur nächsten Rückkehr und anschließenden erneuten Abfahrt vom gleichen Busbahnhof vergeht, beträgt

für den ersten Bus $\frac{3}{4}$ h,

für den zweiten Bus $\frac{1}{2}$ h,

für den dritten Bus 36 Minuten und

für den vierten Bus 1 Stunde.

Zu welcher Uhrzeit fahren hiernach erstmalig alle vier Busse wieder gleichzeitig von dem Busbahnhof ab? Wie viele Fahrten hat jeder der vier Busse bis dahin durchgeführt?

Aufgabe 190612:

Ulrike möchte vier natürliche Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge angeben, so daß folgendes gilt:

Die zweite Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der ersten Zahl,

die dritte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der zweiten Zahl,

die vierte Zahl ist um 1 kleiner als das Doppelte der dritten Zahl,

die Summe der vier angegebenen Zahlen beträgt 79.

Zeige, wie man alle Zahlen finden kann, die diese Bedingungen erfüllen! Überprüfe, ob die gefundenen Zahlen alle Bedingungen erfüllen!

Aufgabe 190613:

In einem Kästchen befinden sich 12 rote, 15 blaue und 8 gelbe Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden. Anke will mit verbundenen Augen eine Anzahl dieser Kugeln herausnehmen. Die Anzahl will sie so wählen, daß sie mit Sicherheit erreicht, daß sich unter den herausgenommenen Kugeln 5 von gleicher Farbe befinden.

Sie meint:	"Es genügt hierzu, 15 Kugeln herauszunehmen."
Birgit meint:	"Es genügen sogar 13 Kugeln."
Cornelia behauptet:	"Es genügen dafür 12 Kugeln."

Entscheide für jede der drei Meinungen, ob sie wahr ist, und begründe deine Entscheidung!

Aufgabe 190614:

Drei Pioniere einer Schule, Karin, Dieter und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen einen ersten, einen zweiten und einen dritten Preis (jeder der drei Pioniere genau einen dieser Preise). Später erkundigte sich Anette nach dem Abschneiden der drei Olympiadeteilnehmer. Man sagte ihr:

"Dieter erhielt keinen ersten Preis." (1)

"Karin erhielt keinen zweiten Preis." (2)

"Frank erhielt einen zweiten Preis" (3)

Später stellte sich heraus, daß von diesen drei Aussagen genau eine wahr, die anderen dagegen falsch waren.

Welcher der drei Schüler erhielt hiernach den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

19. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190621:

Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.

Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Aufgabe 190622:

In einem Regal einer HO-Verkaufsstelle liegen sechs Geschenkartikel zum Preis von

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M,

von jeder Sorte genau ein Stück.

Ein Käufer kaufte genau zwei dieser Geschenke, ein anderer genau drei. Der zweite Käufer hatte doppelt soviel zu bezahlen wie der erste.

Ermittle aus diesen Angaben, welche der sechs Geschenke vom ersten und welche vom zweiten Käufer gekauft wurden!

Aufgabe 190623:

Zum Montieren eines Gerätes sind insgesamt 110 Stunden geplant. Die Montage wird in drei Abschnitten erfolgen. Für den zweiten Abschnitt ist genau dreimal soviel Zeit vorgesehen wie für den ersten; der dritte Abschnitt soll genau halb so lange dauern wie der zweite.

Untersuche, welche Zeiten man hiernach für jeden einzelnen Abschnitt zu planen hat! Überprüfe, ob diese Zeiten alle gestellten Forderungen erfüllen!

Aufgabe 190624:

Ein automatischer Nummernstempel für ein Serienprodukt druckt in jeder Sekunde genau eine natürliche Zahl. Er beginnt mit der Zahl 0 und setzt dann das Drucken der Reihe nach mit den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3, ... fort.

Ermittle die Anzahl aller Ziffern 1, die der Stempel in der ersten Viertelstunde insgesamt zu drucken hat!

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200611:

a		l
	p	
h		a

Petra, eine eifrige Leserin der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, stellt in einer Arbeitsgemeinschaft ihren Mitschülern folgende Aufgabe:

In der abgebildeten Figur sind für a, h, l, p natürliche Zahlen so einzutragen, daß sich in jeder der beiden Diagonalen D_1, D_2 die Summe 80 ergibt. Dabei soll die Zahl a doppelt so groß wie die Zahl p sein; für l soll eine Primzahl eingetragen werden und für h eine Primzahl, die größer als das Zehnfache von l ist.

Ermittle alle Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Gib an, wie du sie gefunden hast!

Aufgabe 200612:

Aus dem Wirtschaftsbuch eines Erholungsheimes war ersichtlich, daß man für 25 Urlauber, die 14 Tage lang versorgt wurden, insgesamt 21 kg Butter verbraucht hatte.

Berechne, wieviel kg Butter für 30 Personen, die 6 Tage lang versorgt werden sollen, insgesamt bereitgestellt werden müssen, wenn je Person und Tag eine gleichgroße Buttermenge wie im angegebenen Beispiel verbraucht werden soll!

Aufgabe 200613:

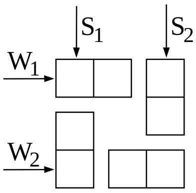
Ermittle aus der Menge aller natürlichen Zahlen von 20 bis 39 alle diejenigen, die durch das Produkt ihrer beiden Ziffern teilbar sind!

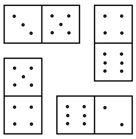
Aufgabe 200614:

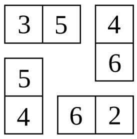
Klaus spielt mit Dominosteinen. Er legt jeweils vier Dominosteine so zusammen, wie es das Bild a) zeigt. Dabei entstehen zwei waagerechte Streifen W_1, W_2 und zwei senkrechte Streifen S_1, S_2. Jeder dieser vier Streifen enthält drei Zahlenfelder. Diese sollen für jeden der vier Streifen dieselbe Summe ergeben; in Bild b) z.B. ist diese Summe 12. Die sonst übliche Regel, daß benachbarte Steine nur mit gleichlautenden Zahlenfeldern aneinanderstoßen dürfen, braucht nicht befolgt zu werden. Anstelle der üblichen Punktsymbole seien die Dominosteine einfacher mit Zahlenzeichen wiedergegeben; siehe Bild c).

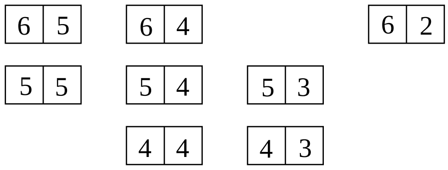
Nachdem Klaus mehrmals Steine in der genannten Weise zusammengelegt hat, verbleiben ihm noch die acht in Bild d) abgebildeten Steine. Er will vier von diesen Steinen in der beschriebenen Art zusammenlegen, wobei in jedem der vier Streifen W_1, W_2, S_1, S_2 die Summe 13 entsteht.

Gib mindestens fünf Möglichkeiten hierfür an! Dabei sollen keine zwei der anzugebenden Möglichkeiten dieselben vier Steine enthalten. Eine Begründung für die anzugebenden Möglichkeiten wird nicht verlangt.

a) 

b) 

c) 

d) 

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200621:

Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2 100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt.

Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

Aufgabe 200622:

Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.

Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau $1,50$ m gefüllt? Wir nehmen an, daß der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

Aufgabe 200623:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1\,000 \leq z \leq 1\,700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

Aufgabe 200624:

Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften "alpha" bzw. "Frösi" regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:

(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift "alpha".

(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift "alpha" regelmäßig.

(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift "Frösi" regelmäßig. Gerd dagegen nicht.

(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.

Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.

Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist! Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210611:

Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt: Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?

b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250? Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

Aufgabe 210612:

6 4 6	:	□ 9	=	□ □
−		·		+
□ □ □	−	□ 6	=	□ 4 □
□ 8 □	−	□ □ □	=	□ □ 0

In jedes leere Kästchen der Abbildung soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9 so geschrieben werden, daß die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.

Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

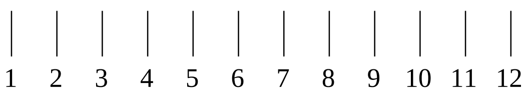
Aufgabe 210613:

Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.

Wieviel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

Aufgabe 210614:

Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Abbildung), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs "Doppelhölzchen" (d.h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden: Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.



Beschreibe eine Serie von Sprüngen die diese Forderungen erfüllt!

21. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210621:

Ein Güterzug fährt von einer Station A (Kilometer 0) zu einer Station B (Kilometer 60). Beim Kilometer 15 hält der Zug 30 Minuten lang; in der übrigen Zeit fährt er mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde. Um 9.30 Uhr fährt der Zug in A ab.

Lege eine Tabelle an, aus der zu ersehen ist, bei welchem Kilometer sich der Zug zu den Uhrzeiten alle 10 Minuten nach der Abfahrt (9.40 Uhr, 9.50 Uhr, 10.00 Uhr u.s.w.) befindet! Begründe diese Kilometerangaben!

Aufgabe 210622:

Fritz findet in einem alten Lehrbuch in einer Aufgabe fünfstellige natürliche Zahlen abgedruckt. Bei einer dieser Zahlen sind die an der Einer- und die an der Zehnerstelle stehenden Ziffern nicht mehr lesbar. Wenn man für diese beiden unlesbaren Ziffern jeweils ein Sternchen (*) setzt, dann hat die Zahl die Form 418**.

Außerdem meint Fritz, aus dem Aufgabentext entnehmen zu können, daß sich die fünfstellige Zahl ohne Rest sowohl durch 6 als auch durch 7 und durch 9 teilen läßt.

Untersuche, ob es eine fünfstellige Zahl gibt, die als die betreffende Zahl in dem Lehrbuch gestanden haben könnte und alle genannten Teilbarkeitseigenschaften hat! Nenne diese Zahl! Gibt es außer ihr noch andere derartige Zahlen?

Aufgabe 210623:

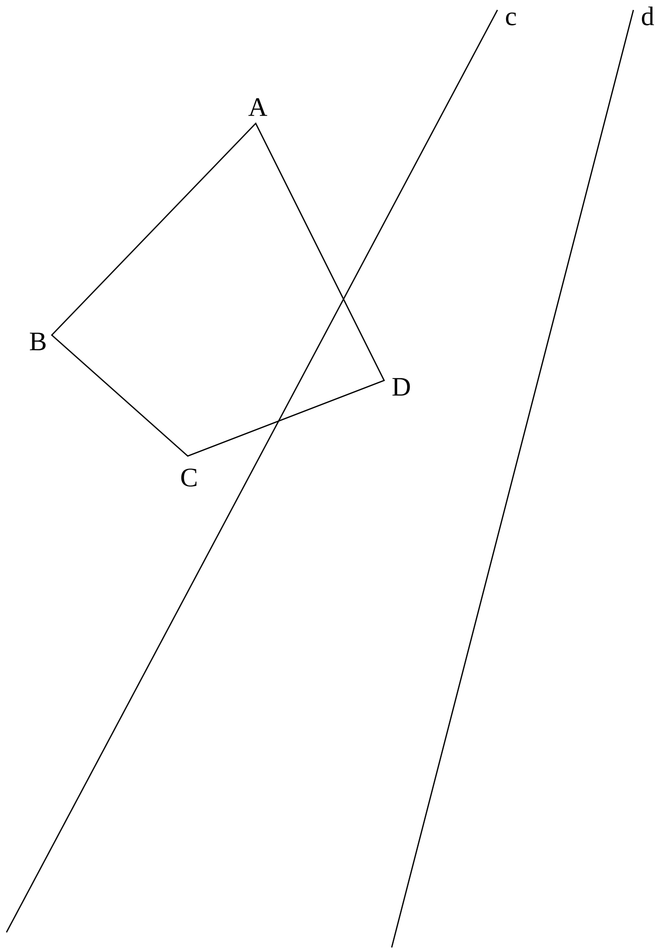
Im Laufe eines Jahres ist in einem Möbelwerk die Zahl der hergestellten Tische monatlich um 10 angewachsen. Im Laufe des ganzen Jahres wurden 1920 Tische hergestellt.

a) Wieviel Tische wurden im Monat Juni hergestellt ?

b) Wieviel Tische wurden im Monat Dezember hergestellt?

Aufgabe 210624:

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden c und d! Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.


c
d
A
B
D
C

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220611:

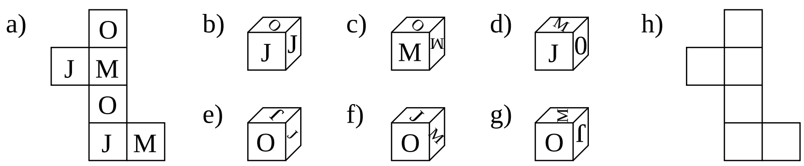
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.

Wieviel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter faßt?

Aufgabe 220612:

Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)

a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein? Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, daß sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen läßt:

(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.

(2) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild d) entsteht.

(3) Der Würfel läßt sich so drehen, daß Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

Aufgabe 220613:

Bei einem Sportwettkampf beteiligten sich die Pioniere Anton, Bernd, Christian, Detlef, Ernst und Frank am Hochsprungwettbewerb. Über das Ergebnis gelten folgende Aussagen:

(1) Anton sprang höher als Frank, erreichte aber eine kleinere Sprunghöhe als Detlef.

(2) Frank und Ernst erreichten verschiedene Sprunghöhen; es ist jedoch nicht wahr, daß Frank höher als Ernst sprang.

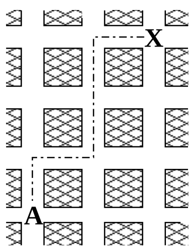
(3) Christian erreichte die gleiche Höhe wie Anton, sprang aber höher als Ernst.

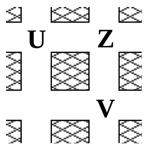
(4) Es ist falsch, daß Bernd die Sprunghöhe eines anderen Pioniers erreichte oder übertraf.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Reihenfolge der Sprunghöhen der sechs Pioniere eindeutig erhalten läßt! Wenn dies möglich ist, so nenne diese Reihenfolge, und beginne dabei mit der größten Sprunghöhe!

Aufgabe 220614:

Das Bild a) zeigt einen Teil eines Stadtplanes. Ein Auto soll auf einem möglichst kurzen Weg von A zu einer anderen Kreuzung, z.B. X fahren. Als Beispiel ist ein solcher Weg eingetragen. Man will - für jede von A verschiedene Kreuzung Z - wissen, wieviel verschiedene möglichst kurze Wege von A nach Z es insgesamt gibt.

a)


b)


a) Suche zunächst alle diejenigen Kreuzungen, zu denen genau ein möglichst kurzer Weg von A aus hinführt!

b) Das Bild b) bedeute einen Ausschnitt aus Bild a), wobei Z eine der in a) nicht betrachteten Kreuzungen sein soll. Wenn man schon weiß, wieviel möglichst kurze Wege von A nach U es gibt und wieviel möglichst kurze Wege von A nach V es gibt, wie kann man dann die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen?

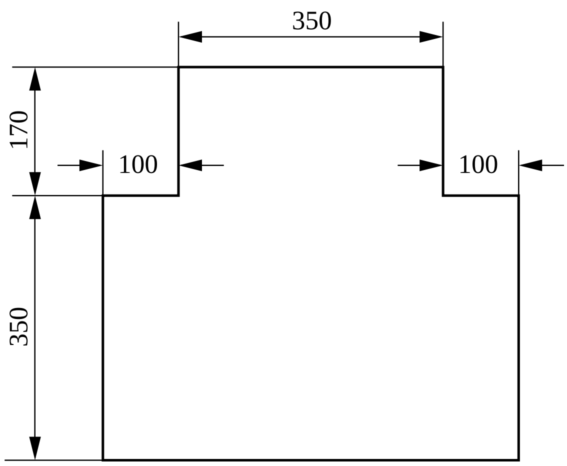
c) Benutze die Überlegungen zu a) und b), um für jede der elf von A verschiedenen Kreuzungen Z die gesuchte Anzahl zu finden!

d) Ermittle die Anzahl der möglichst kurzen Wege von A nach X in Bild a) noch einmal auf andere Weise: Schreibe jeden dieser Wege durch Angabe der Richtungen seiner fünf Teilstrecken auf! Benutze dabei Abkürzungen, z.B. w für waagerecht, s für senkrecht!

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220621:



Die Abbildung zeigt den Grundriß eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben. Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.

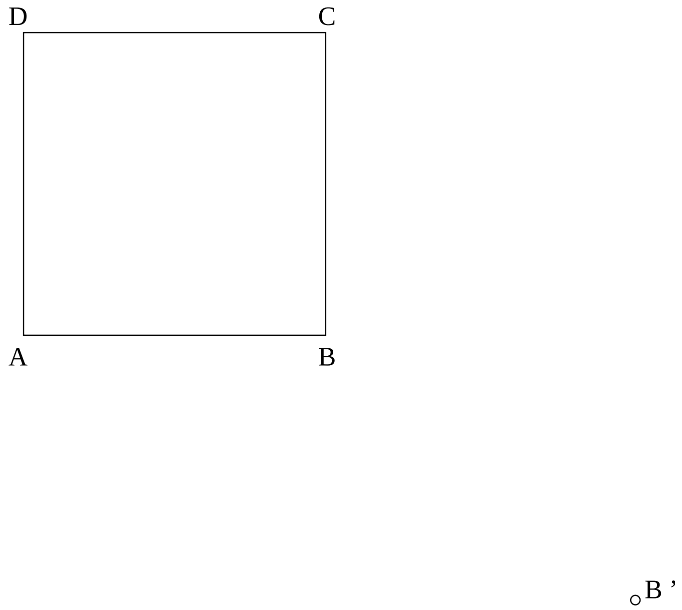
Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten! Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, daß sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

Leistung	Lohnkosten pro m^2
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

Aufgabe 220622:

Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g.

Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.



Aufgabe 220623:

Die Zahl 32 soll in eine Summe aus vier natürlichen Zahlen zerlegt werden, von denen folgende Eigenschaft gefordert wird.

Wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, vom zweiten 3 subtrahiert, den dritten mit 3 multipliziert und den vierten durch 3 dividiert, dann sind die vier Ergebnisse, die man erhält, alle gleich groß.

Nenne vier derartige Summanden! Überprüfe, daß sie alle Forderungen erfüllen! Beweise, daß die Forderungen durch keine anderen Summanden erfüllt werden können!

Aufgabe 220624:

An fünf voneinander und von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e werden folgende acht Forderungen gestellt:

(1) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,

(2) b ist ein Teiler von c,

(3) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von e,

(4) d ist ein Teiler von e,

(5) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von b,

(6) b ist ein Teiler von d,

(7) c ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von a,

(8) a ist ein [ganzzahliges] Vielfaches von d.

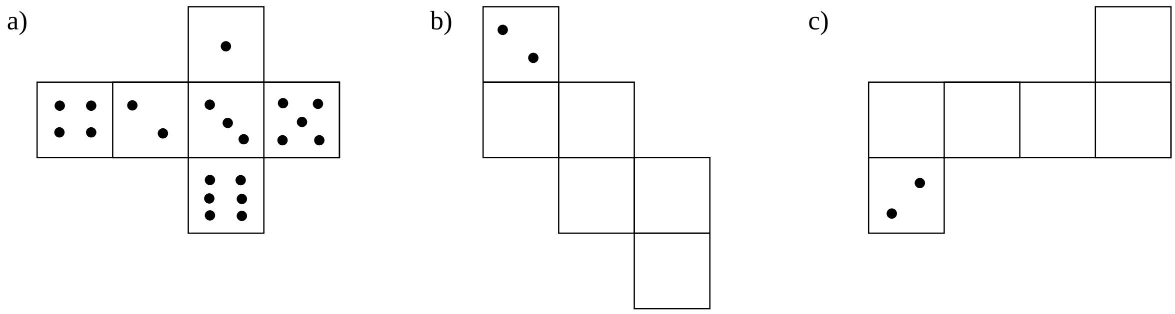
Untersuche, ob diese acht Forderungen erfüllbar sind und ob sich aus ihnen die Anordnung der fünf Zahlen ihrer Größe nach ergibt! Wenn dies der Fall ist, so nenne diese Anordnung; beginne dabei mit der größten der fünf Zahlen!

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230611:

Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.



Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)? Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

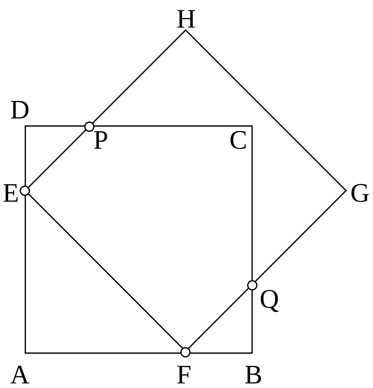
Aufgabe 230612:

Eine Brigade kaufte für ihre Patenklasse drei Bücher und zwei Bälle. Eine andere Brigade kaufte drei Bücher und vier Bälle. Alle Bücher kosteten gleich viel. Alle Bälle kosteten ebenfalls gleich viel.

Die erste Brigade bezahlte 15 Mark, die zweite Brigade bezahlte 24 Mark.

Wieviel Mark kostete ein Buch? Wieviel Mark kostete ein Ball?

Aufgabe 230613:



Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben.

Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, daß sie

a) genau einen Punkte,

b) genau zwei Punkte,

c) genau drei Punkte,

d) genau fünf Punkte,

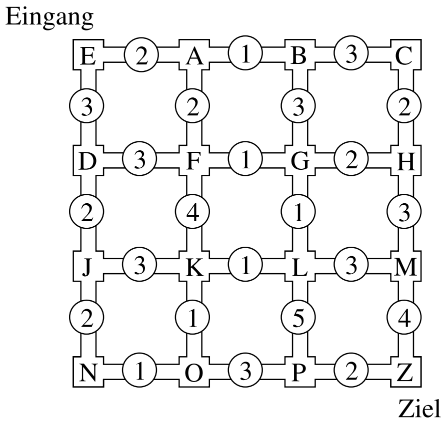
e) genau sechs Punkte,

f) genau sieben Punkte,

g) genau acht Punkte

gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 230614:



Luise will so rasch wie möglich vom Eingang (E) zum Ort des Pionierpressefestes (Ziel (Z)) gehen. Auf dem skizzierten (nicht maßstäblichen) Plan sind alle möglichen Wege vom Eingang zum Ziel sowie jeweils die Minuten angegeben, die für die verschiedenen Teilstrecken gebraucht werden. Jeder Teilnehmer erhält einen derartigen Plan und soll angeben, wie er auf dem schnellsten Wege zum Ziel kommt.

a) Gib einen Weg an, für den möglichst wenig Zeit gebraucht wird! Wieviel Minuten sind für diesen Weg ausreichend?

b) Gib noch mindestens zwei weitere derartige Wege an!

Hinweis: Um die Angabe der Wege zu erleichtern, werden die Abzweigungs- bzw. Kreuzungspunkte mit A, B, C, D, E, F, ..., P bezeichnet, wie es in der Abbildung angegeben ist.

23. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230621:

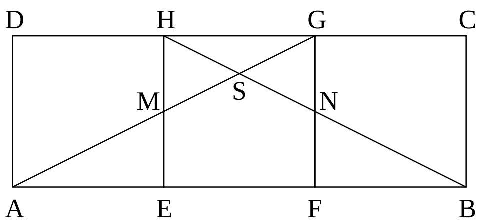
Von einem Milchhof sollen an einem Tag 2 200 Kästen mit je 25 Behältern zu $\frac{1}{4}$ Liter Milch, ferner 600 Kästen mit je 24 Flaschen zu $\frac{1}{2}$ Liter und 800 Kästen mit je 12 Beuteln zu 1 Liter Milch ausgeliefert werden. Die hierfür insgesamt benötigte Milchmenge wurde in Tankwagen angeliefert, von denen jeder 9 000 Liter Milch faßt.

a) Berechne, wieviel Liter Milch insgesamt an diesem Tag ausgeliefert werden sollen!

b) Berechne die kleinstmögliche Anzahl von Tankwagen, die zur Anlieferung der benötigten Milchmenge insgesamt ausreichend waren!

Aufgabe 230622:

Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M, die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N. Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle

a) den Flächeninhalt des Dreiecks SGH,

b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABS,

c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, daß jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

Aufgabe 230623:

Die vier Schüler Erdbach, Freimuth, Giebler und Hausmann haben die Vornamen Alfred, Bernd, Christian und Detlef (möglicherweise nicht in dieser Reihenfolge). Sie trafen sich auf Siegfried Zanders Geburtstagsfeier. Folgenden ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Siegfried seinen Mitschüler Hausmann begrüßen, als zweiten Christian und danach Erdbach. Zuletzt kam Bernd.

(2) Jeder dieser vier Gäste brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit: Hausmann ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Bernd einen Strauß Rosen und Giebler ein Buch.

Zeige, daß sich aus diesen Angaben für die vier Geburtstagegäste eindeutig ermitteln läßt, wie ihre zusammengehörenden Vor- und Familiennamen lauten! Gib diese zusammengehörenden Namen an!

Aufgabe 230624:

Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, daß es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.

Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, daß es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.

Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, daß es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.

a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, daß alle drei Aussagen wahr sind!

b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

24. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

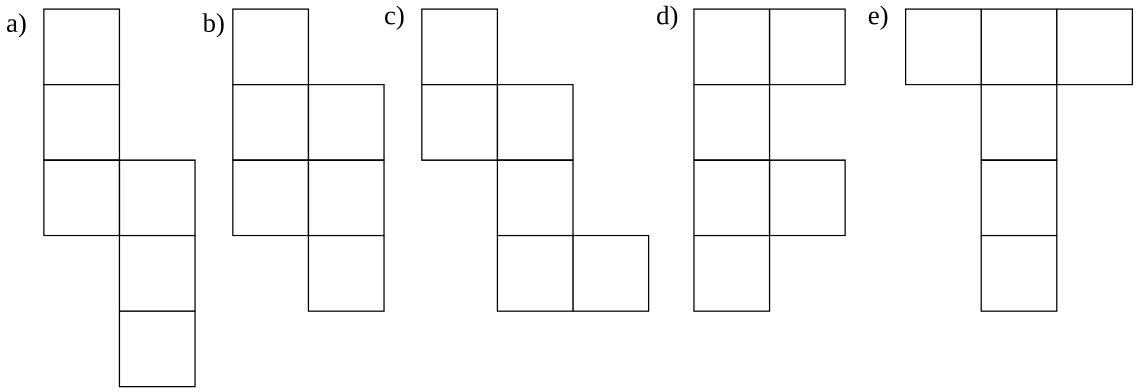
Aufgabe 240611:

Zum Pioniergeburtstag sollen die tüchtigsten Altstoffsammler ausgezeichnet werden. Hierzu will die Pionierleiterin Bücher zu je 6 M und zu je 4 M kaufen, von jeder Sorte mindestens eins, andere Sorten aber nicht. Insgesamt will sie 30 M für diese Bücher ausgeben.

Gib alle Möglichkeiten an, welche Anzahlen von Büchern der beiden Sorten gewählt werden können, um diesen Bedingungen zu entsprechen!

Aufgabe 240612:

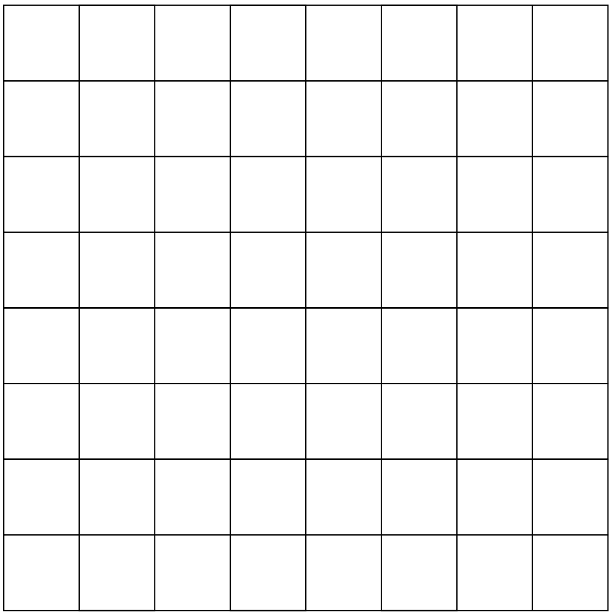
Michael zeichnet fünf verschiedene Bilder: Bild a) bis e). Er behauptet, daß es Körpernetze von Würfeln seien.



(1) Gib alle diejenigen unter den Bildern a) bis e) an, für die Michaels Behauptung wahr ist! (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

(2) Zeige, daß es möglich ist, aus einem quadratischen Gitternetz von 8 cm Seitenlänge, wie es Bild f) darstellt, neun Würfelnetze der in Aufgabe (1) gefundenen Art auszuschneiden! Es soll erlaubt sein, die Würfelnetze unverändert oder umgeklappt (spiegelbildlich) zu erhalten. Jedes in (1) gefundene Würfelnetz soll mindestens einmal vorkommen. Die Seitenlänge der einzelnen Quadrate in (1) soll dieselbe sein wie in (2), also 1 cm.

Zeichne derartige neun Würfelnetze in ein Gitternetz ein! Wieviele Felder des Gitternetzes werden dabei nicht benötigt?

f) 

Aufgabe 240613:

Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so daß er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar. Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, daß von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20\,\text{cm}$, $a_2 = 10\,\text{cm}$, $a_3 = 4\,\text{cm}$ der Größe nach so übereinander gestellt werden, daß der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.

Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

Aufgabe 240614:

Rita multipliziert eine Zahl z mit 9 und erhält als Ergebnis 111 111 111.

(a) Um welche Zahl z handelt es sich?

(b) Ermittle eine Zahl x, die folgende Eigenschaft besitzt!

Wenn man x mit der in (a) ermittelten Zahl z multipliziert, dann erhält man als Produkt eine Zahl, die mit lauter Ziffern 8 (in normaler Schreibweise des Zehnersystems) geschrieben wird.

(c) Gibt es außer der in (b) ermittelten Zahl x noch weitere Zahlen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen?

Wenn dies der Fall ist, so ermittle eine weitere solche Zahl!

24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240621:

Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

(1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.

(2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.

(3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.

(4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Aufgabe 240622:

Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.

Wieviele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen? (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 240623:

Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.

Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.

Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

Aufgabe 240624:

Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. (Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)

Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

(1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.

(2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.

(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.

(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:

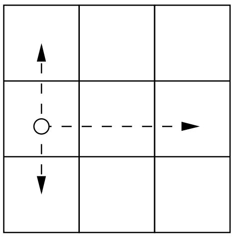
"Wieviele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?"

Beweise, daß man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne daß ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250611:



Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.

a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solche Spielsteine!

b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?

Aufgabe 250612:

$$\begin{array}{cccccc} & m & a & t & h & e \\ + & & o & l & y & m \\ + & & & & p & i \\ + & & & a & d & e \\ \hline k & l & a & s & s & e \end{array}$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist.

Ferner wird folgendes gefordert:

(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.

(2) a ist zwei Drittel von m.

(3) e ist zwei Drittel von a.

(4) Die Summe von a und s ist gleich m.

(5) d ist kleiner als h.

a) Zeige, daß es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!

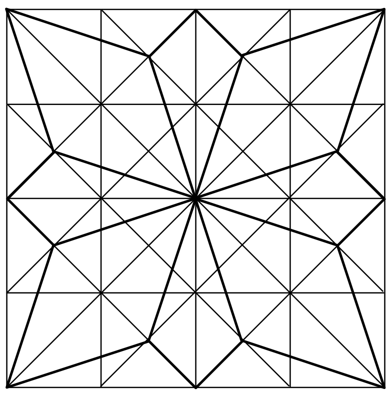
b) Wieviel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

Aufgabe 250613:

Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier. Dirk liefert 32 kg Papier ab. Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, daß sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.

Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, daß Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte? Gib alle Möglichkeiten an!

Aufgabe 250614:



In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet. Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist! Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!

Ist beides der Fall, so nenne

a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,

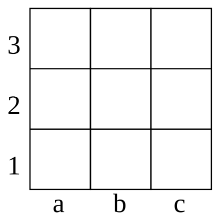
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!

Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250621:



Auf einem (3×3)-Spielbrett (siehe Abbildung) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, daß jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.

Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 250622:

Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.

(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man

(2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
(2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
(2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
(2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

Aufgabe 250623:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.

a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!

b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

Aufgabe 250624:

Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

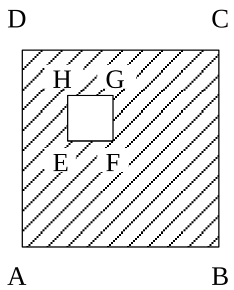
a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!

b) Weise nach, daß es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260611:



In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt. HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.

a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild schraffierten Fläche!

b) Die schraffierte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, daß man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann. Zeichne eine solche Aufteilung der schraffierten Fläche!

Aufgabe 260612:

Zur Durchführung eines Geländespiels war es nötig, daß jeder Teilnehmer ein Schreibgerät bei sich hatte. Es waren nur folgende Sorten Schreibgeräte von Teilnehmern mitgebracht worden. Kugelschreiber, Rotstifte und Grünstifte; keine dieser drei Sorten kam doppelt bei einem der Teilnehmer vor. Im einzelnen wurde festgestellt:

(1) Es waren insgesamt 100 Teilnehmer bei diesen Geländespiel.

(2) Genau 20 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Rotstift.

(3) Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber keinen Grünstift.

(4) Genau 5 der Teilnehmer hatten einen Kugelschreiber, aber weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

(5) Genau 65 der Teilnehmer hatten keinen Kugelschreiber.

(6) Genau 55 der Teilnehmer hatten keinen Rotstift.

(7) Genau 40 der Teilnehmer hatten keinen Grünstift.

(8) Genau 15 der Teilnehmer hatten weder einen Rotstift noch einen Grünstift.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl derjenigen Teilnehmer, die wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht hatten!

b) Reichten die mitgebrachten Schreibgeräte aus, um bei geeigneter Verteilung jeden der 100 Teilnehmer mit einem Schreibgerät zu versorgen?

Aufgabe 260613:

Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km. Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe? Begründe deine Entscheidung!

b) Wieviel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?

c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

Aufgabe 260614:

Auf einem Kreis werden wie beim Zifferblatt einer Uhr zwölf Punkte eingetragen. Auf jeden der Punkte wird genau ein Spielstein gelegt. Zwei Spieler A und B sollen abwechselnd jeweils entweder genau einen Stein oder genau zwei Steine, die auf benachbarten Punkten liegen, wegnehmen. Spieler A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten Spielstein wegnimmt.

Wie kann Spieler B vorgehen, um in jedem Fall zu gewinnen?

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260621:

Bei der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt.

2 7 * * 7

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist.

Gib alle fünfstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Aufgabe 260622:

Die Mädchen Britta, Petra und Anja wünschen sich einen Ball, eine Puppe und ein Album für Briefmarken. Dabei wünscht sich jedes der Mädchen genau einen der genannten Gegenstände, und zwar jedes Mädchen einen anderen. Marie soll feststellen, wer von den Mädchen sich welchen Gegenstand wünscht. Auf ihre Frage erhält sie folgende Antworten:

(1) Britta wünscht sich den Ball.

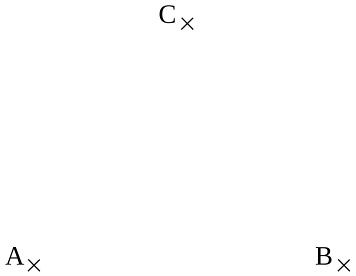
(2) Petra wünscht sich den Ball nicht.

(3) Anja wünscht sich das Album nicht.

Von diesen drei Antworten ist genau eine wahr, die anderen beiden sind falsch. Wenn man das weiß, kann man für jedes der drei Mädchen eindeutig feststellen, welchen Gegenstand es sich wünscht.

Erkläre, wie sich diese Feststellungen gewinnen lassen und gib die Feststellungen an!

Aufgabe 260623:



Es seien A, B, C die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$ gilt!

b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!

c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 260624:

Der Schüler Frank Schludrig meint, über seine Klasse folgendes herausgefunden zu haben:

In der Klasse sind genau 28 Schüler, davon sind genau 16 Jungen. An Arbeitsgemeinschaften nehmen genau 20 Schüler der Klasse teil, davon sind genau 8 Jungen. An der Kreisolympiade Junger Mathematiker beteiligten sich genau 4 Schüler der Klasse, davon waren genau 2 Jungen. Von diesen Olympiadeteilnehmern sind genau 1 Junge und genau 1 Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft.

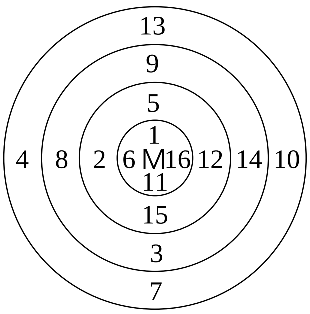
Der Schüler Rolf Schlauberger hört sich diese Angaben an und behauptet nach einigem Überlegen, daß Frank Schludrig ein Irrtum unterlaufen sein muß.

Weise nach, daß die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen können!

27. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270611:



Vier Kreisscheiben (siehe Abbildung) sind jede für sich um ihren gemeinsamen Mittelpunkt M so zu drehen, daß danach immer vier Zahlen auf je einem Strahl mit dem Anfangspunkt M liegen. Dabei soll die Summe der vier Zahlen auf jedem Strahl 34 betragen.

Gib mindestens eine Möglichkeit solcher Drehungen an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 270612:

In jedes leere Feld des abgebildeten Quadrats (siehe Abbildung) ist eine der Zahlen 2, 3, 4, 5 einzutragen. Dabei soll in keiner Spalte oder Zeile eine dieser Zahlen mehrfach vorkommen. Ferner soll in keiner Spalte oder Zeile neben einer Zahl deren Nachfolger oder Vorgänger stehen.

1			
	1		
		1	
			1

Gib mindestens zwei solche Eintragungen an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Es gibt sogar mehr als zwei solche Eintragungen.

Aufgabe 270613:

Auf einer Wippe stellt sich heraus:

(1) Andreas ist leichter als Frank, aber schwerer als Dirk.

(2) Stefan ist leichter als Andreas, aber schwerer als Dirk.

(3) Peter ist leichter als Jürgen, aber schwerer als Michael.

(4) Jürgen ist leichter als Dirk.

Ordne die Jungen nach ihren Gewicht; beginne bei dem schwersten!

Überprüfe, ob bei der von dir angegebenen Reihenfolge alle Aussagen (1) bis (4) wahr sind!

Aufgabe 270614:

Kerstin zerschneidet ein rechteckiges Stück Papier so, daß der Schnitt vom Mittelpunkt einer Rechteckseite zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verläuft. Es entstehen zwei kleinere Rechtecke; Kerstin legt sie genau übereinander, so daß nur noch ein kleineres Rechteck zu sehen ist, das aus zwei Schichten besteht.

Kerstin zerschneidet dieses aus zwei Schichten bestehende Rechteck in gleicher Weise und legt wieder die entstandenen rechteckigen Papierstücke genau übereinander. Entsprechend wird fortgesetzt: übereinanderliegende Rechtecke werden zerschnitten, die entstandenen Papierstücke werden übereinandergelegt. (Natürlich geht das nicht beliebig oft; denn der Papierstapel, der zerschnitten werden soll, wird immer dicker.)

(1) Nenne die Anzahl der Papierstücke, die nach dem

a) zweiten, b) dritten, c) vierten

Zerschneiden entstanden sind!

(2) Angenommen, das Zerschneiden wäre beliebig oft möglich. Warum könnten dann trotzdem niemals nach einen Schnitt genau 160 Papierstücke entstehen?

27. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270621:

Über einen 100 m-Lauf, den die drei Schüler Jens, Michael und Peter austrugen, wurden folgende Vorhersagen gemacht:

Frank sagte: "Jens oder Peter wird gewinnen."

Horst sagte: "Wenn Jens nicht gewinnt, dann gewinnt Michael."

Norbert sagte: "Wenn Michael gewinnt, dann wird Jens Zweiter."

Stefan sagte: "Michael wird schlechter abschneiden als Jens und Peter."

(a) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Alle vier Voraussagen sind wahre Aussagen.

(b) Nach dem Lauf wurde festgestellt: Als einziger hatte Horst eine wahre Aussage gemacht.

Gib in beiden Fällen (a), (b) an, wer Erster, Zweiter bzw. Dritter wurde! In beiden Fällen (a), (b) ist noch bekannt, daß Jens, Peter und Michael alle drei verschiedene Zeiten liefen.

Erkläre, wie du deine Angaben gefunden hast!

Aufgabe 270622:

(a) Bei einem Wettkampf, an dem sich genau vier Mannschaften A, B, C und D beteiligten, spielte jede dieser Mannschaften gegen jede andere dieser Mannschaften genau ein Spiel. Zähle diese Spiele auf!

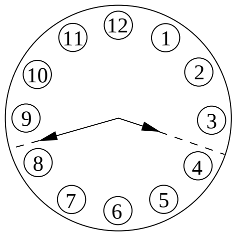
(b) Bei einem anderen Wettkampf spielte ebenfalls jede der teilnehmenden Mannschaften gegen jede andere der teilnehmenden Mannschaften genau ein Spiel. So kamen genau 21 Spiele zustande.

Wie viele Mannschaften nahmen insgesamt an diesem Wettkampf teil?

Zeige, daß bei der von dir angegebenen Anzahl von Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen!

Aufgabe 270623:

(a)

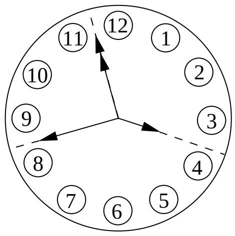


Der Stundenzeiger einer Uhr (siehe Abbildung) zeigt um 3.42 Uhr in die Lücke zwischen den Zahlen 3 und 4, der Minutenzeiger in die Lücke zwischen 8 und 9. Dadurch wird das Zifferblatt so aufgeteilt, daß in einem Teil die Summe $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ und im anderen Teil die Summe $9 + 10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 48$ steht.

Gesucht werden Uhrzeiten folgender Art: Jeder Zeiger zeigt in eine der zwölf Lücken zwischen benachbarten Zahlen und dadurch wird das Zifferblatt in zwei Teile aufgeteilt, in denen die gleiche Summe steht.

Nenne zwei solche Uhrzeiten zwischen 0.00 Uhr und 12.00 Uhr, die sich voneinander um mehr als 5 Minuten unterscheiden!

(b)



Bei einer anderen Uhr (siehe Abbildung) zeigt 57 Sekunden nach 3.42 Uhr der Sekundenzeiger in die Lücke zwischen den Zahlen 11 und 12.

Hierdurch und durch die anderen Zeiger wird das Zifferblatt in Teile mit den Summen

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30,$$
$$9 + 10 + 11 = 20,$$
$$12 + 1 + 2 + 3 = 18$$

aufgeteilt.

Warum gibt es keine Uhrzeit, bei der (jeder Zeiger in eine der zwölf Lücken zeigt und) das Zifferblatt in drei Teile aufgeteilt wird, in denen die gleiche Summe steht?

Aufgabe 270624:

In einer Werkhalle stehen vier Maschinen zur Herstellung von Werkstücken. Jeweils in 24 Stunden werden

auf Maschine A genau 2 Werkstücke,

auf Maschine B genau 3 Werkstücke,

auf Maschine C genau 8 Werkstücke,

auf Maschine D genau 12 Werkstücke

hergestellt. Für jede der Maschinen gilt, daß zum Herstellen der Werkstücke auf dieser Maschine stets die gleiche Zeit gebraucht wird. Dabei ist die Zeiteinteilung so angelegt, daß jeweils die Herstellung des nächsten Werkstückes genau dann beginnt, wenn das vorhergehende fertig ist.

An einem Tag beginnen alle vier Maschinen gleichzeitig um 0.00 Uhr mit der Herstellung eines neuen Werkstücks. Wie oft kommt es an diesem Tag bis einschließlich 24.00 Uhr insgesamt vor, daß

(a) auf allen vier Maschinen,

(b) auf genau drei der vier Maschinen,

(c) auf genau zwei der vier Maschinen

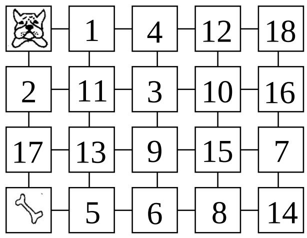
zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird?

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

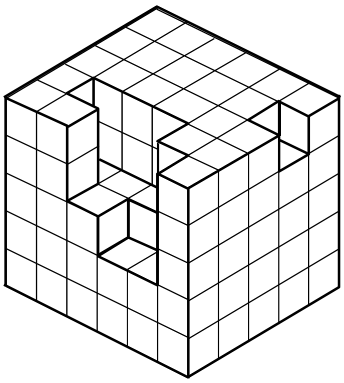
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280611:

Bello kann nur dann zum Knochen gelangen, wenn er einen Weg wählt, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 2 431 beträgt. Welchen Weg muß er wählen?



Aufgabe 280612:



Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.

Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?

Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!

Aufgabe 280613:

Mario, Petra, Rigo und Tanja unterhalten sich darüber, welche Plätze sie bei der Schulolympiade wohl belegen werden. Dabei äußern sie folgende Meinungen:

(1) Tanja wird den ersten Platz erreichen und Petra den zweiten.

(2) Tanja wird Zweite werden und Rigo Dritter.

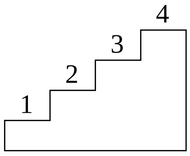
(3) Mario wird den zweiten Platz und Rigo den vierten belegen.

(4) Keine zwei Schüler werden auf den gleichen Platz kommen.

Nach Abschluß der Schulolympiade stellt sich heraus, daß die Aussage (4) wahr ist und daß in den Meinungen (1), (2) und (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist.

Gib an, welcher Schüler hiernach welchen Platz bei der Schulolympiade belegte! Zeige, daß die von dir genannte Platzverteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Aufgabe 280614:



Die Treppe in der Abbildung besteht aus vier Stufen. Um diese vierstufige Treppe hinaufzugehen, darf man jeweils mit einem Schritt entweder genau eine oder genau zwei Stufen nach oben steigen. (Eine hiernach mögliche Schrittfolge lautet z.B. 1, 3, 4.)

a) Gib für diese Treppe alle möglichen Schrittfolgen an! Wieviel sind es insgesamt?

b) Gib für eine dreistufige Treppe alle möglichen Schrittfolgen an, ebenso für eine zweistufige Treppe und für eine einstufige Treppe!

c) Jemand behauptet: "Man kann die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine vierstufige Treppe durch eine einfache Rechnung finden, wenn man die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe und die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe kennt."

Gib eine solche einfache Rechnung an! Schreibe sie in Form einer Gleichung!

d) Schreibe entsprechend eine Gleichung, mit der sich die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe aus den entsprechenden Anzahlen für eine zweistufige und für eine einstufige berechnen läßt!

e) Wie kommt es, daß die in c) und d) gefundenen Beziehungen gelten?

f) Gib die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen für eine fünfstufige und für eine sechsstufige Treppe an!

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280621:

An der Bahnstrecke von Pfiffigstadt nach Knobelshausen liegen zwischen diesen beiden Orten noch drei Bahnstationen: Adorf, Bedorf, Cedorf.

In jedem dieser fünf Bahnhöfe kann man Fahrkarten nach jedem anderen dieser Bahnhöfe kaufen. André besitzt zu jeder dieser möglichen Verbindungen genau eine Fahrkarte. Weitere Fahrkarten hat er noch nicht in seiner Sammlung.

Wieviel Fahrkarten hat André insgesamt? (*Hinweis:* Hin- und Rückfahrt gelten als verschiedene Verbindungen, kombinierte ”Hin- und Rückfahrkarten” gibt es jedoch nicht.)

Aufgabe 280622:

Frau Müller und ihre Tochter Michaela, Frau Beyer und ihre Söhne Jan und Gerd sowie Frau Schulz mit ihren Kindern Steffi und Jens besuchen gemeinsam eine Veranstaltung. Frau Müller kauft die Eintrittskarten für alle und bezahlt 22 Mark.

Wieviel Geld müssen Frau Beyer und Frau Schulz der Frau Müller geben, um die Eintrittskarten für sich und ihre Kinder zu bezahlen, wenn für Michaela, Jan, Gerd, Steffi und Jens jeweils nur der halbe Eintrittspreis wie für einen Erwachsenen entrichtet werden mußte?

Aufgabe 280623:

Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um $8\,\text{cm}^2$ kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks. Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest: Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um $13\,\text{cm}^2$ größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.

Weise nach, daß sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen! Gib diese Seitenlängen an!

Aufgabe 280624:

Heidi, Manuela, Peggy und Simone starteten beim Schulsportfest, jedes dieser Mädchen in genau einer der Sportarten ”Handball”, ”Mehrkampf”, ”Pop-Gymnastik”, ”Schwimmen”. Ferner ist bekannt:

(1) Jedes der vier Mädchen errang genau eine Medaille; zwei Mädchen Gold, die beiden anderen Silber.

(2) Für Mädchen mit gleicher Medaille gilt stets: Bei jedem dieser Mädchen beginnt der Name mit demselben Buchstaben wie die Sportart des anderen Mädchens.

(3) Heidi erhielt eine Medaille geringeren Wertes als Manuela.

(4) Simone erkämpfte nicht die gleiche Medaille wie die Handballerin.

Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig gefunden werden kann,

a) in welcher Sportart jedes der Mädchen gestartet ist,

b) welche Medaille jedes der Mädchen errungen hat!

Überprüfe auch, ob mit den so gefundenen Sportarten und Medaillen alle Angaben (1) bis (4) erfüllt werden!

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

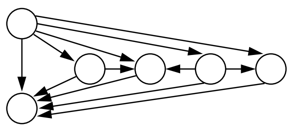
Aufgabe 290611:

Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wieviel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Liter, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Liter. (Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)

Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

Aufgabe 290612:

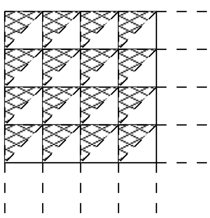
a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, daß jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.



b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!

c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

Aufgabe 290613:



Ein rechteckiger Fußboden, der $3,6$ m lang und $2,7$ m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, daß ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.

Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.

Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

Aufgabe 290614:

Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.

Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, daß es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!

a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?

b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?

c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>Aufgabe 290621:</u>

Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:

(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil. Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.

(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.

(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.

(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.

Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, daß sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.

Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln läßt! Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

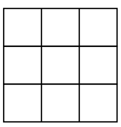
<u>Aufgabe 290622:</u>

a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2; 3)$, $B(6; 1)$, $C(6; 5)$ und $D(4; 6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, daß ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, daß jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt. Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

<u>Aufgabe 290623:</u>



Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.

a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!

b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

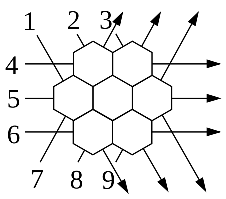
Aufgabe 290624:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

a) In ein 3×3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt.

Das Bild zeigt dafür ein Beispiel.

Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!



b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem Bild und stellt die Aufgabe:

In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.

Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an! Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

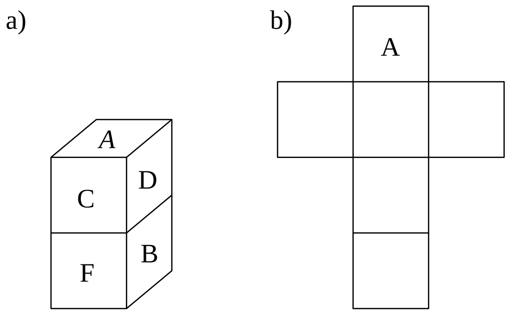
30. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300611:

Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.

Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, daß zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.



Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an! Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muß!

Aufgabe 300612:

a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!

b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z.B. die Zahl 24 801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

Aufgabe 300613:

Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, daß 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.

Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 300614:

Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnumeriert.

a) Wie oft wurde bei der Numerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?

b) Wie oft wurde bei der Numerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?

c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Numerierung zu drucken?

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300621:

a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1),\ B(5;1),\ C(5;5),\ D(1;5)$$

und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

$$P(9;1),\ Q(13;1),\ R(13;5),\ S(9;5)$$

ein!

b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist? Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

Aufgabe 300622:

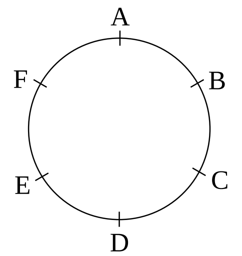


Abbildung a

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abbildung a) so ändern, daß in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann: Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abbildung a) als Nachbarn hatte.

a)

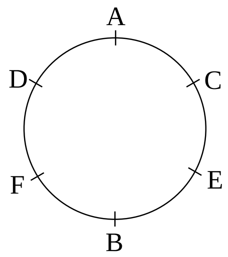


Abbildung b

Abbildung b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, daß tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an! Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind.

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 300623:
Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stückzahl	350	340	320	340	360	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1 020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden. Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 300624:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Aufgaben

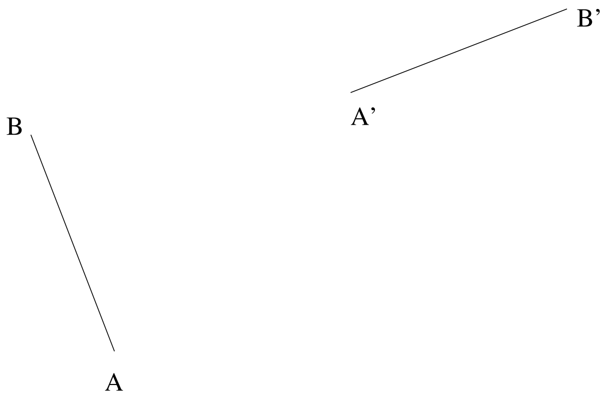
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310611:

Uwe und Jan zeichnen jeder ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen läßt. Jans Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Uwes Rechteck.

Ermittle die Seitenlängen der Rechtecke von Uwe und Jan!

Aufgabe 310612:



a) Begründe, daß jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muß!

b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und $A'B'$.

Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild A'B' hat! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Aufgabe 310613:

Elke, Regina, Gerd und Joachim vergleichen ihre Briefmarkensammlungen. Sie bemerken:

(1) Joachim hat mehr Briefmarken als Gerd.

(2) Elke und Regina haben zusammen genau so viele Briefmarken, wie Joachim und Gerd zusammen haben.

(3) Elke und Joachim haben zusammen weniger Briefmarken als Regina und Gerd zusammen haben.

Stelle fest, ob diese Angaben nur durch eine Reihenfolge für die Anzahlen von Elkes, Reginas, Gerds und Joachims Briefmarken erfüllt werden können! Wenn das der Fall ist, ermittle diese Reihenfolge, nach fallenden Anzahlen geordnet!

Aufgabe 310614:

An einem Ausflug nahmen insgesamt 20 Personen teil. Man bemerkte:

(1) Genau 5 der Teilnehmer waren 30 Jahre alt oder jünger.

(2) Von den Teilnehmern, die älter als 30 Jahre waren, kauften sich genau 10 bei der ersten Rast etwas zu trinken, genau 12 bei der zweiten Rast. Kein Teilnehmer verzichtete beide Male auf diesen Kauf.

(3) Genau 6 der Teilnehmer waren 40 Jahre alt oder älter, darunter genau 2, die bei der ersten Rast nichts zu trinken kauften, und genau 2, die bei der zweiten Rast nichts zu trinken kauften.

Wieviele der Teilnehmer, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften sich sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Rast etwas zu trinken?

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310621:

a) Eine sechsstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3 geschrieben werden. Die Reihenfolge dieser sechs Ziffern soll so gewählt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

   (1) Zwischen den beiden Ziffern 1 soll genau eine andere Ziffer stehen.

   (2) Zwischen den beiden Ziffern 2 sollen genau zwei andere Ziffern stehen.

   (3) Zwischen den beiden Ziffern 3 sollen genau drei andere Ziffern stehen.

b) Eine achtstellige Zahl soll mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 geschrieben werden. Für die Reihenfolge soll außer den Bedingungen (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt werden:

   (4) Zwischen den beiden Ziffern 4 sollen genau vier andere Ziffern stehen.

Gib zu a) und zu b) jeweils alle Zahlen an, die die Bedingungen erfüllen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 310622:

Zwischen vier Mannschaften A, B, C, D wurde ein Fußballturnier ausgetragen. Jede Mannschaft spielte genau einmal gegen jede andere. Für ein gewonnenes Spiel gab es zwei Punkte, für ein unentschiedenes einen Punkt und für ein verlorenes Spiel keinen Punkt. Das Spiel zwischen den Mannschaften C und D endete als einziges unentschieden. Keine zwei Mannschaften erreichten die gleiche Punktzahl. Die Mannschaft B wurde Letzter.

a) Untersuche, ob durch diese Informationen eindeutig bestimmt ist, welchen Platz die Mannschaft A belegte und wieviel Punkte sie erreichte! Wenn das der Fall ist, gib beides an!

b) Sind die gegebenen Informationen auch ausreichend, um den genauen Endstand (Plazierungen der einzelnen Mannschaften und jeweils erreichte Punkte) des Turniers angeben zu können? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 310623:

Wieviele natürliche Zahlen gibt es insgesamt, die

a) Teiler von 256 sind,

b) Teiler von $2 \cdot 256$ sind,

c) Teiler von $256 \cdot 256$ sind?

Erkläre zu jeder deiner drei Antworten, wie du sie gefunden hast!

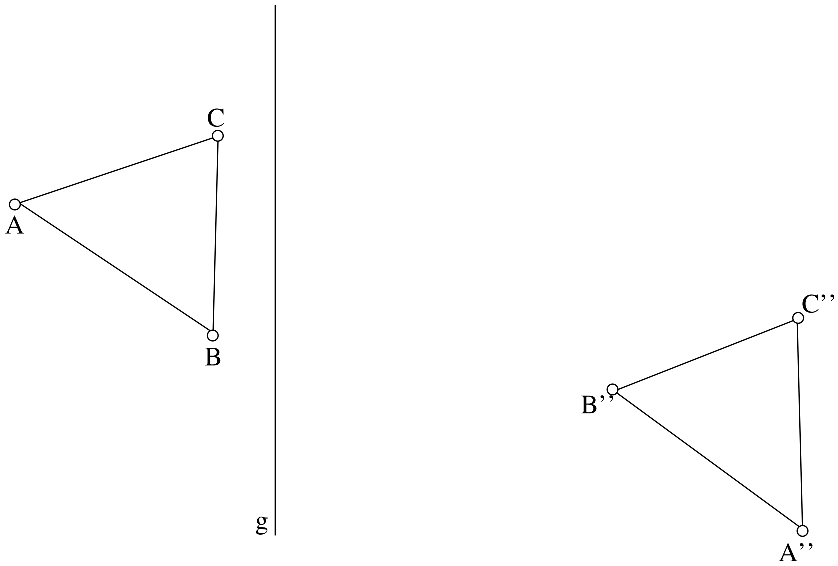
Aufgabe 310624:
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke ABC, $A''B''C''$ und eine Gerade g. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von ABC bei der Spiegelung an g,
2. der Drehpunkt M derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion!

Eine Begründung wird nicht verlangt.



32. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320611:

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & A & = & B \\ \cdot & & - & & - \\ C & \cdot & C & = & D \\ \hline E & - & F & = & G \end{array}$$

Für die Buchstaben sind Grundziffern (0; 1; 2; . . . ; 8; 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Grundziffern und für unterschiedliche Buchstaben unterschiedliche Grundziffern stehen und daß die angegebenen Rechenoperationen richtig gelöst sind.

Aufgabe 320612:

Von drei Mädchen aus unterschiedlichen Familien sei folgendes bekannt:

(1) Sie heißen Sabine, Christiane und Miriam.

(2) Miriam hätte lieber blondes Haar wie eines der drei Mädchen.

(3) Jedes der drei Mädchen hat eine andere Haarfarbe.

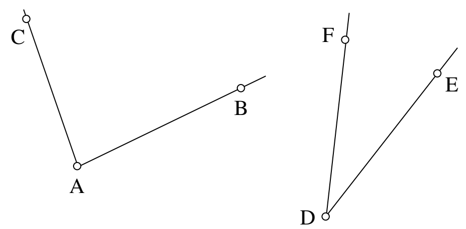
(4) Das rothaarige Mädchen hat dieselbe Haarfarbe wie ihr Bruder.

(5) Christiane hätte lieber solches schwarzes Haar wie die Schwester von Miriam.

(6) Das schwarzhaarige Mädchen hat keine Geschwister und ist mit seiner Haarfarbe zufrieden.

Welche Haarfarbe hat jedes der drei Mädchen?

Aufgabe 320613:



Gegeben seien zwei Winkel BAC und EDF mit den Maßen $\alpha + \beta$ bzw. $\alpha - \beta$ (s. Abb.). Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen α und β.

Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.

Aufgabe 320614:

Ein Radfahrer fährt von Schnellhausen nach Sausedorf, wobei er täglich 36 Kilometer zurücklegt. Gleichzeitig fährt ihm ein anderer Radfahrer, der täglich 34 Kilometer zurücklegt, von Sausedorf aus entgegen. Die Entfernung zwischen Schnellhausen und Sausedorf beträgt 350 km.

In wieviel Tagen treffen sich die beiden Radfahrer? Führe auch eine Probe durch.

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320621:
Bei der folgenden sechsstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich geworden und durch Sternchen ersetzt:

$$3\ 8\ *\ *\ 4\ 2$$

Anstelle der Sternchen sind zwei Ziffern so einzufügen, daß die Zahl durch 9 teilbar ist.

Gib alle sechsstelligen Zahlen an, die durch derartiges Einfügen entstehen können! Weise nach, daß alle gesuchten Zahlen von dir angegeben wurden!

Aufgabe 320622:
Ein Holzwürfel, dessen sechs Seitenflächen mit roter Farbe angestrichen wurden, wird anschließend in eine Anzahl untereinander gleichgroßer Teilwürfel zersägt.

a) Wie groß ist diese Anzahl, wenn bekannt ist, daß sich unter den entstandenen Teilwürfeln genau 72 mit je genau zwei roten Seitenflächen befinden?

b) Wieviele der übrigen entstandenen Teilwürfel haben je genau eine rote Seitenfläche,

c) wieviele haben keine rote Seitenfläche?

Aufgabe 320623:
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt A aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt B).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt C).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt D). Von ihr aus sollt ihr wieder nach A zurückfinden.

a) Um wieviel Grad muß die Pfadfindergruppe in D den Kurs ändern, um geradlinig nach A zu gelangen?

b) Wie lang ist die Strecke von A nach D?

c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von C aus nach A zurückkehren. Wie weit ist A von C entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniiertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnimm die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

Aufgabe 320624:

Ein rechteckiges Kinderzimmer ist 4 m und 40 cm lang sowie 3 m und 30 cm breit. Es hat genau eine Tür, diese ist 90 cm breit. Thomas will an die Wände dieses Zimmers eine neue Fußbodenleiste anbringen. Er berechnet durch Berücksichtigung der genannten Maßangaben die erforderliche Gesamtlänge an Leistenholz.

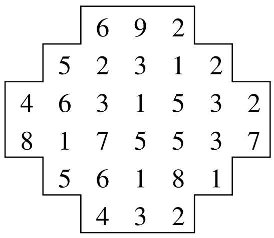
Das laufende Meter Leistenholz kostet 5 DM. Thomas kauft die von ihm berechnete Gesamtlänge und bezahlt mit einem Hundertmarkschein. Wieviel Geld erhält er zurück?

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Aufgaben

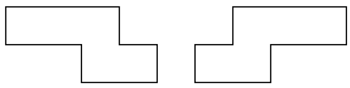
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330611:

Zerlege die Figur aus Abb. a) so in Teilstücke, daß jedes Teilstück die Gestalt von Abb. b) oder von Abb. c) hat und daß auf jedem Teilstück die Summe der Zahlen 20 beträgt!



a)



b) c)

Aufgabe 330612:

Zwei Zahlen sollen die Summe 2 028 haben. Dividiert man die erste Zahl durch 28, so soll sich dasselbe ergeben wie bei Division der zweiten Zahl durch 128.

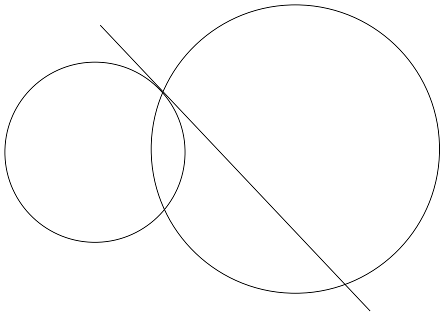
Zeige, daß die beiden Zahlen durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind; finde sie und bestätige, daß sie die Forderungen erfüllen!

Aufgabe 330613:

Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,

1. wieviele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wieviele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.

Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.



Zeichne Figuren mit

a) 2 Punkten, 4 Gebieten;

b) 4 Punkten, 4 Gebieten;

c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

Anregung: Stelle fest, welche Punkt- und Gebietszahlen überhaupt möglich sind! Was ändert sich, wenn auch Kreise zugelassen werden, die sich berühren?

Aufgabe 330614:
Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnet man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n mit dem Zeichen $n!$ (gelesen: "n - Fakultät"). Beispielsweise ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Wie lauten die letzten drei Ziffern der Zahl, die sich beim Ausrechnen von

$$1! + 2! + 3! + 4! + ... + 99! + 100!$$

ergeben würde?

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330621:

Von einem "Fest der Tiere" wird erzählt:

> Dort waren ebenso viele Storchenbeine wie Käfer, 90 Käferbeine mehr als Hasen, aber dreimal so viele Hasenbeine wie Störche.

Nenne Anzahlen der Störche, Hasen und Käfer, so daß die Erzählung stimmt! Überprüfe dies bei deinen Anzahlangaben!

Bemerkung: Die Tiere sollen alle nach dem Biologielehrbuch gebaut sein: Jeder Storch mit 2 Beinen, jeder Hase mit 4 Beinen, jeder Käfer mit 6 Beinen.

Aufgabe 330622:

Man denke sich aus den fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch die Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können. Welches ist die Summe aller dieser fünfziffrigen Zahlen?

Aufgabe 330623:

Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm und dem rechten Winkel bei C! Konstruiere weiter den Kreis k um C mit dem Radius $2,5$ cm!

Nun soll eine Gerade g so gelegt werden, daß folgende Bedingung erfüllt wird: Wenn man das Dreieck ABC an g spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis k genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d.h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade g und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

Aufgabe 330624:

In einer Schachtel sind Kugeln; jede von ihnen hat eine der Farben blau, gelb, rot. Von jeder Farbe sind mindestens 3, aber höchstens 7 Kugeln vorhanden. Die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel ist eine Primzahl.

Die Anzahl der roten Kugeln ist durch die Anzahl der gelben Kugeln teilbar. Nimmt man eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, so ist die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel durch 5 teilbar, außerdem ist dann wieder die Anzahl der roten Kugeln in der Schachtel durch die Anzahl der gelben Kugeln in der Schachtel teilbar.

Wieviele Kugeln waren zu Anfang von jeder Farbe in der Schachtel?

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330631:

Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenstellen, daß $a+b+c=12$ und $c-b=3$ gilt!

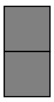
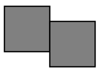
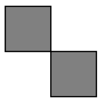
Hinweis:

1. Die Null soll auch als natürliche Zahl bezeichnet werden.
2. Es wird auch zugelassen, daß sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

Aufgabe 330632:

Aus 21 Quadraten der Seitenlänge 1 cm soll eine Figur F zusammengesetzt werden:

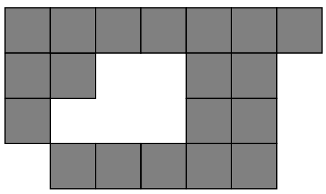
An das erste Quadrat legt man ein zweites so an, daß sie beide genau eine Seite gemeinsam haben: 

oder  (dagegen *nicht*  und auch *nicht* )

Dann legt man immer das nächste Quadrat so an, daß es ebenfalls genau eine Seite mit einem schon hingelegten Quadrat gemeinsam hat.

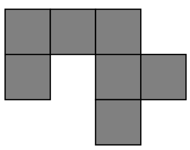
Am Ende soll die Figur F folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Es soll keine freie Fläche geben, die ganz von Quadraten der Figur F umschlossen wäre, zum Beispiel:



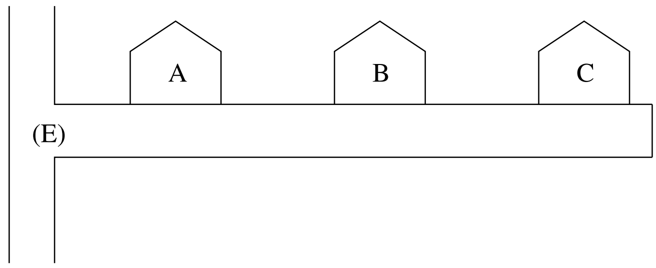
(2) Die Figur F soll ganz in ein großes Quadrat der Seitenlänge 6 cm hineinpassen.

(3) Die Figur F soll den Umfang 42 cm haben. *Beispiel:* Der *Umfang* der folgenden Figur beträgt 16 cm.



Zeichne eine solche Figur F!

Aufgabe 330633:
In einer Sackgasse, die an einer Ecke (E) beginnt, stehen drei Häuser A, B, C in einer Reihe:



Ein Briefträger, der die Sackgasse an der Ecke (E) betritt, dann zu jedem Haus Post bringt und danach zur Ecke (E) zurückkehrt, kann dies z.B. in der Reihenfolge (E) $\Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow$ (E) tun. Er kann es aber z.B. auch in der Reihenfolge (E) $\Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C \Rightarrow$ (E) tun; dabei macht er jedoch einen Umweg, weil er die Strecke zwischen A und B öfter als nötig durchläuft.

(a) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt? Nenne alle diese Möglichkeiten!

(b) Jetzt sollen in der Sackgasse vier Häuser in einer Reihe stehen. Wieviele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es hierzu insgesamt? Nenne auch alle diese Möglichkeiten!

(c) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge, bei denen kein Umweg vorkommt, gibt es insgesamt, wenn in der Sackgasse 10 Häuser in einer Reihe stehen?

Hinweis: Für diese Aufgabe kann man Überlegungen beim Lösen von (a) und (b) nutzen.

Aufgabe 330634:
Sechs Kugeln, und zwar drei blaue und drei gelbe, werden an Annette, Bernd und Christiane verteilt. Jedes dieser drei Kinder bekommt wenigstens eine Kugel, aber höchstens drei Kugeln. Damit die Verteilung nicht so leicht zu erkennen ist, macht Dieter drei falsche Aussagen.

Erika meint dennoch: Wenn man weiß, daß alle diese Aussagen falsch sind, ist die Verteilung der Kugeln (für jedes Kind die Anzahlen der blauen und der gelben Kugeln) dadurch eindeutig bestimmt.

Die drei Aussagen von Dieter lauten:

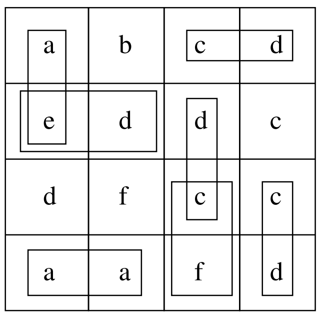
(1) Die blauen Kugeln wurden an weniger als drei Kinder verteilt.

(2) Annette bekam genau zwei Kugeln.

(3) Bernd bekam Kugeln unterschiedlicher Farben.

Hat Erika recht? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 330635:
Ein 4×4 - Feld soll mit Buchstaben so gefüllt werden, wie folgendes Bild an einem Beispiel zeigt:



In jedem so gefüllten Feld kann man "Wörter" lesen, die aus zwei Buchstaben bestehen. Die "Wörter" liest man entweder von links nach rechts oder von oben nach unten. (Als Beispiele sind die "Wörter" ae, cd, ed, dc, cf, cd und aa hervorgehoben. Man hat also auch solche "Wörter" zu beachten, die einen Buchstaben gemeinsam haben, wie im Beispiel ae mit ed und dc mit cf.)

"Wörter", die sich nur in der Reihenfolge der Buchstaben voneinander unterscheiden (wie im Beispiel cd und dc), gelten nicht als einander gleich.

Folgende Bedingungen werden zusätzlich verlangt:

(1) In keinem "Wort" dürfen die beiden Buchstaben einander gleich sein (wie im Beispiel im "Wort" aa).

(2) Kein "Wort" darf mehrfach vorkommen (wie im Beispiel das "Wort" cd).

a) Finde eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und nur die 7 Buchstaben a, b, c, d, e, f, g verwendet!

b),c) Gibt es auch eine Eintragung, die diese Bedingungen erfüllt und

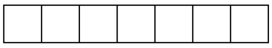
b) nur 6 Buchstaben,

c) nur 5 Buchstaben

verwendet? Begründe Deine Antworten!

Aufgabe 330636:

Anja und Bernd spielen ein Spiel nach folgenden Regeln:

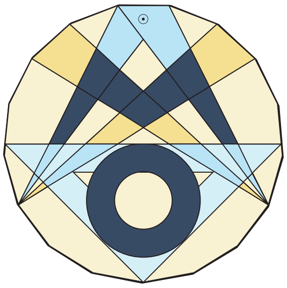
Verwendet werden 8 Karten, jede mit genau einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und ein Spielbrett aus 7 Feldern: 

Zunächst wird eine natürliche Zahl n vereinbart. Dann legen Anja und Bernd abwechselnd (beginnend mit Anja) auf je ein beliebiges Feld der Figur, das noch frei ist, eine der noch nicht verwendeten Karten. Am Ende ist eine siebenstellige Zahl entstanden. Ist sie durch n teilbar, so hat Anja gewonnen, anderenfalls Bernd.

a) Finde zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, für die gilt: Ist diese Zahl als n vereinbart worden, so kann Anja den Gewinn erzwingen, gleichgültig, wie Bernd spielt! Erkläre, wie Anja dies tun kann!

b) Beweise folgende Aussage! Wurde $n = 9$ vereinbart, so gewinnt stets Bernd, gleichgültig, welche Karten beide Spieler legen.

c) Untersuche, ob im Fall, daß $n = 21$ vereinbart wurde, einer der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, gleichgültig, wie der andere spielt!



34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340611:

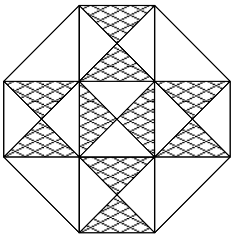
Herr Eilig fuhr auf der Autobahn eine Strecke von 475 Kilometern. Er legte diese Strecke in 3 Stunden und 10 Minuten zurück und verbrauchte dabei 57 Liter Benzin.

a) Wie groß war seine durchschnittliche Geschwindigkeit?

b) Wieviel Benzin hatte er im Durchschnitt für je 100 km verbraucht?

c) Wäre er stattdessen mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 120 km/h gefahren, so hätte er für je 100 km nur 8 Liter verbraucht. Welche Strecke hätte er bei der Durchschnittsgeschwindigkeit 120 km/h mit dem gesparten Benzin noch fahren können?

Aufgabe 340612:



Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.

Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?

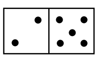
Aufgabe 340613:

Nach einem Wandertag wurden die Kinder gefragt, welche Erfrischungen sie sich gekauft hatten. Es hatte Cola, Hamburger und Popcorn gegeben. Die Befragung ergab das folgende Ergebnis:

Jeder der Teilnehmer hatte wenigstens eine der drei Waren gekauft. Von ihnen genau 22 mindestens Cola, genau 14 mindestens einen Hamburger und genau 13 wenigstens Popcorn. Mindestens Cola und Hamburger kauften genau 10 Teilnehmer, mindestens Cola und Popcorn genau 4 und genau 5 wenigstens Hamburger und Popcorn. Alle drei Waren gleichzeitig wurden nur von 2 Teilnehmern gekauft.

Weise nach, daß durch diese Angaben die Anzahl der Teilnehmer eindeutig bestimmt ist! Berechne diese Anzahl!

Aufgabe 340614:

a) Zu einem Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6 gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Die Abbildung zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5:  Nenne alle Steine eines Dominospiels!

b) Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein "Fenster" wie in Abb. b) legen, und zwar so, daß auf jeder der vier "Seiten" des Fensters dieselbe Summe auftritt (im Beispiel beträgt diese "Seitensumme" 9).

Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 10, eines mit der Seitensumme 11 und eines mit der Seitensumme 12! Eine Begründung wird nicht verlangt.

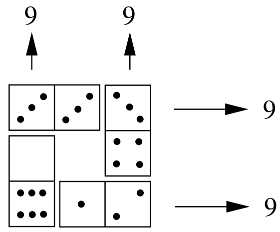


Abb. b)

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340621:

Ein Jogger benötigt im Dauerlauf für 100 m jeweils 20 Sekunden.

a) Welche Stecke schafft er, wenn er dieses Tempo 20 Minuten lang unverändert durchhält?

b) Welche Strecke schafft er, wenn sich in den insgesamt gelaufenen 20 Minuten auch Zeiten befinden, in denen er für 100 m jeweils 30 Sekunden benötigt, und zwar auf Teilstrecken, die zusammen 1600 m betragen?

Aufgabe 340622:

Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.

Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite $\overline{AD}$ bzw. $\overline{EF}$ haben die Gärten?

b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?

c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge $\overline{GH}$ ist Knobels Garten länger geworden?

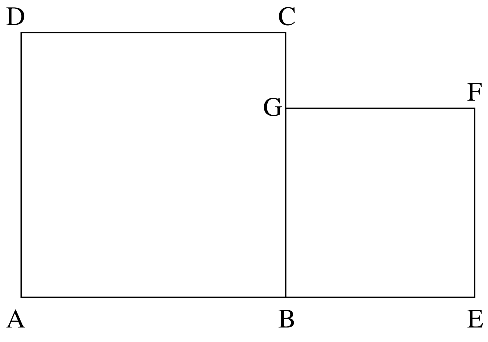


Abbildung a

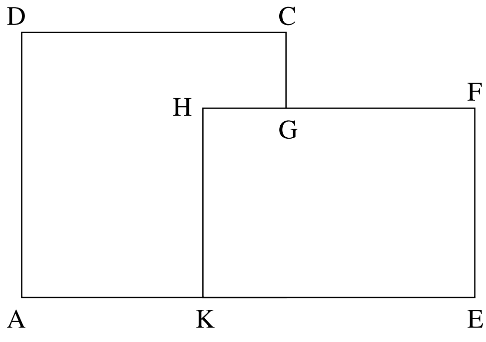


Abbildung b

Aufgabe 340623:

Nach folgenden Regeln läßt sich ein "Zahlenzug" bilden:

- Im ersten "Waggon" steht eine natürliche Zahl größer als 1.
- Steht in einem "Waggon" eine gerade Zahl, so steht im nächsten "Waggon" die halb so große Zahl.

- Steht in einem ”Waggon” eine ungerade Zahl größer als 1, so steht im nächsten ”Waggon” die um 1 kleinere Zahl.
- Steht in einem ”Waggon” die Zahl 1, so ist der ”Zahlenzug” mit diesem ”Waggon” beendet.

a) Nenne alle diejenigen ”Zahlenzüge”, die aus genau 4 ”Waggons” bestehen! Begründe auch, daß deine Aufzählung vollständig ist!

b) Welches ist die größtmögliche Zahl, die im ersten ”Waggon” eines ”Zahlenzuges” vorkommen kann, der aus genau 7 ”Waggons” besteht? Nenne einen solchen ”Zahlenzug” mit dieser Anfangszahl und zeige, daß eine größere Anfangszahl nicht möglich ist!

c) Welches ist die kleinstmögliche Zahl, die im ersten ”Waggon” eines ”Zahlenzuges” vorkommen kann, der aus genau 7 ”Waggons” besteht? Nenne einen solchen ”Zahlenzug” mit dieser Anfangszahl und zeige, daß eine kleinere Anfangszahl nicht möglich ist!

Aufgabe 340624:

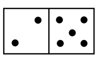


Abb. A 340624 a

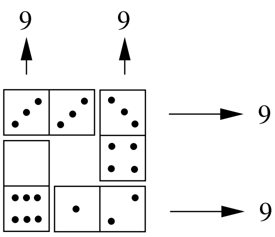


Abb. A 340624 b

Zu einem *Dominospiel mit den Zahlen von 0 bis 6* gehören 28 Steine. Jede Zusammenstellung von zwei der Zahlen kommt auf einem dieser Steine vor. Abb. 340624 a zeigt als Beispiel den Stein mit den Zahlen 2 und 5. (Auch die 0 wird hier als natürliche Zahl bezeichnet.)

Aus vier geeignet ausgewählten Steinen eines Dominospiels kann man ein ”Fenster” wie in Abb A 340624 b legen, und zwar so, daß auf jeder der vier ”Seiten” des Fensters dieselbe Summe auftritt. Im Beispiel der Abb. A 340624 b beträgt diese ”Seitensumme” 9.

a) Nenne je ein Beispiel für ein Fenster mit der Seitensumme 2 und eines mit der Seitensumme 16!

b) Begründe, daß es kein Fenster mit der Seitensumme 18 gibt!

c) Es gibt noch drei weitere natürliche Zahlen kleiner 19 mit der Eigenschaft, daß kein Fenster die betreffende Zahl als Seitensumme hat. Finde diese Zahlen und begründe für sie die Unmöglichkeit, Seitensumme eines Fensters zu sein!

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340631:

Jedes konvexe Vieleck läßt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a).

Skizziere für ein selbstgewähltes

a) konvexes Fünfeck

b) konvexes Sechseck

alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann *konvex* genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.

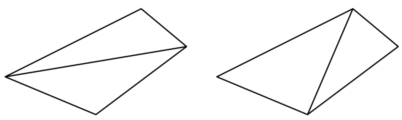


Abbildung a

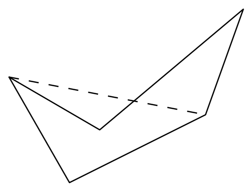


Abbildung b

Aufgabe 340632:

Man kann die Buchstaben eines Wortes in eine andere Reihenfolge bringen. Jede so entstandene Aneinanderreihung von Buchstaben soll ebenfalls ein "Wort" genannt werden, auch wenn sie (in der deutschen Sprache) keinen Sinn ergibt. Wichtig ist nur, daß jeder Buchstabe genau so oft vorkommt wie im ursprünglichen Wort. Zum Beispiel lassen sich aus dem Wort TAL insgesamt folgende Wörter bilden:

ALT, ATL, LAT, LTA, TAL, TLA.

Sie sind hier alphabetisch geordnet (zum Beispiel steht ATL vor LAT, weil der erste Buchstabe A von ATL im Alphabet früher vorkommt als der erste Buchstabe L von LTA; über die Reihenfolge von LAT und LTA mit gleichem ersten Buchstaben entscheidet der zweite Buchstabe u.s.w.).

Wie man sieht, steht bei dieser Anordnung das Wort TAL an der 5. Stelle der Aufzählung.

(a) Gib alle Wörter an, die sich ebenso aus dem Wort $LAND$ bilden lassen (das Wort $LAND$ ist dabei mit aufzuzählen)!

(b) Wenn die Wörter in (a) alphabetisch geordnet werden, an welcher Stelle steht dann das Wort $LAND$?

(c) Wie viele Wörter lassen sich aus dem Wort $UMLAND$ bilden? (Wieder ist $UMLAND$ mitzuzählen.)

(d) An wievielter Stelle steht bei alphabetischer Ordnung der Wörter aus (c) das Wort $UMLAND$?

Aufgabe 340633:

Schon vor 5000 Jahren gab es in Ägypten eine weit entwickelte Kenntnis der Bruchrechnung. Dabei wurden *Stammbrüche* bevorzugt; das sind Brüche, deren Zähler 1 lautet und deren Nenner eine natürliche Zahl ist.

(a) Gib je eine Möglichkeit an, wie man die Brüche $\frac{2}{7}$ und $\frac{3}{13}$ als Summe von mindestens zwei unterschiedlichen Stammbrüchen darstellen kann!

Die Anzahl der Summanden ist nicht vorgeschrieben; eine Begründung wird nicht verlangt.

(b) Stelle den Bruch $\frac{1}{36}$ derart als Summe von mindestens zwei Stammbrüchen dar, daß einer der Summanden so groß wie möglich ist! Erkläre, warum kein größerer Summand möglich ist!

(c) Löse dieselbe Aufgabe für $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{36}$, wo n eine beliebige natürliche Zahl größer als 1 ist!

Aufgabe 340634:

Vera erzählt ihrer Freundin Ute, sie habe die Kantenlänge eines Quaders gemessen und dabei folgendes bemerkt:

(1) Eine der Kanten ist doppelt so lang wie eine andere der Kanten.

(2) Die Summe der Längen aller zwölf Kanten des Quaders beträgt 320 cm.

(3) Genau zwei der sechs Seitenflächen des Quaders sind Quadrate.

Ute meint, durch diese Angaben sei eindeutig bestimmt, welche Kantenlängen bei diesem Quader auftreten. Untersuche, ob Utes Meinung wahr ist! Wenn sie wahr ist, gib die Kantenlängen an; wenn sie nicht wahr ist, gib alle Möglichkeiten an, die es für die Kantenlängen eines Quaders gibt, auf den Veras Angaben zutreffen!

Hinweis: Bei der Angabe der Kantenlängen eines Quaders brauchst du natürlich nicht zwölf Kantenlängen anzugeben, sondern es genügen die Längen etwa der drei Kanten, die an der Ecke des Quaders zusammentreffen.

Aufgabe 340635:

In das Schema der Abbildung a kann man anstelle der Buchstaben Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 so eintragen, daß die vier "Seitensummen" einander gleich sind:

$$a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a.$$

Ein Beispiel, hier mit dem Wert 14 der vier "Seitensummen", zeigt die Abbildung b.

(a) Gib drei solcher Eintragungen an, eine mit dem Wert 2 der vier "Seitensummen", eine mit dem Wert 13 der vier "Seitensummen" und eine mit dem Wert 17 der vier "Seitensummen"!

(b) Auch mit dem Wert 18 der vier "Seitensummen" ist eine solche Eintragung möglich; dagegen nicht, wenn das Schema so mit Steinen des Dominospiels gebildet werden soll, wie die Abbildung c zeigt.

Zeige, daß das stimmt; erkläre den Unterschied!

(Du erinnerst dich vielleicht an eine Aufgabe aus der 2. Runde der Mathematik-Olympiade dieses Schuljahres. Es ist zugelassen - freilich nicht verlangt, - Teile der Lösung jener Aufgabe als bekannten Sachverhalt anzuführen.)

(c) Fritz Schlaumeier schaut das ausgefüllte Schema für die "Seitensumme" 14 an, überlegt eine ganze Weile und meint dann: "Die vier Zahlen für b, d, f und h stehen in einer ganz besonderen Beziehung zueinander. Diese Beziehung gilt auch für jede Ausfüllung mit einer anderen 'Seitensumme'."

Gib eine solche Beziehung an und weise nach, daß Fritz recht hat!

a	b	c
h		d
g	f	e

Abb. a

4	4	6
5		5
5	6	3

Abb. b

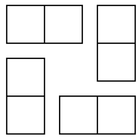


Abb. c

Aufgabe 340636:

Vater, Mutter, Tochter und Sohn in einer Familie stellen fest:

(1) Das Produkt aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages beträgt beim Vater 242, bei der Mutter 200 und bei der Tochter 6.

(Beispiel für eine solche Produktbildung: Ein Geburtstag am 30. Juli ergibt $30 \cdot 7 = 210$.)

(2) Die Summe aus Tag- und Monatszahl des Geburtstages ergibt bei jedem der vier Familienmitglieder die - in ganzen Zahlen gerechnete - Altersangabe in Jahren.

(3) Die Summe dieser vier Altersangaben beträgt 80.

(4) Das Produkt dieser vier Altersangaben beträgt 59 400.

(a) Wie alt sind die Familienmitglieder? Wann haben Vater, Mutter und Tochter Geburtstag?

Gewinne die Antworten auf diese Fragen ausgehend von den Feststellungen (1), (2), (3), (4)! Untersuche dabei auch, ob es für einige der erfragten Angaben mehrere Möglichkeiten gibt!

(b) Zeige, daß man die Aufgabe (a) auch noch - mit demselben Ergebnis - lösen kann, wenn man eine der Feststellungen (1), (2), (3), (4) wegläßt!

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010611:

a) $9\frac{4}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{9\cdot 15+4}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{139}{15} \cdot \frac{138}{139} = \frac{138}{15} = \frac{9\cdot 15+3}{15} = 9\frac{1}{5}$,

b) $3\,451\frac{23}{35} - 2\,868\frac{24}{49} = 3\,451 + \frac{23}{5\cdot 7} - 2\,868 - \frac{24}{7\cdot 7} = 3\,451 - 2\,868 + \frac{23\cdot 7 - 24\cdot 5}{5\cdot 7\cdot 7} = 583\frac{41}{245}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010612:

Die Treffsicherheit ist hier das Verhältnis zwischen dem Radius des Trefferkreises und der Entfernung des Zieles. Diese ist in beiden Fällen gleich, so dass es genügt, das unbekannte Verhältnis als $x : 25\,\text{m}$ darzustellen und mit dem bekannten Verhältnis $1\,\text{km} : 12\,500\,\text{km}$ gleichzusetzen. Auflösen führt auf: $x = 25\,\text{m} \cdot 1\,\text{km}/12\,500\,\text{km} = 0{,}002\,\text{m} = 2\,\text{mm}$. Man beachte, dass sich die Einheit km kürzt.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010613:

a) Die zurückgelegte Strecke ist die Differenz der Zählerstände, also $18\,030\,\text{km} - 17\,880\,\text{km} = 150\,\text{km}$.

b) Der Benzinverbrauch für verschiedene Strecken steht in demselben Verhältnis wie die Länge der Strecken. Daher $x : 10{,}5\,\text{l} = 350\,\text{km} : 150\,\text{km}$, also $x = 24{,}5\,\text{l}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010614:

Unter den vier Zahlen befinden sich stets zwei gerade und zwei ungerade. Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, bei der Addition gerader Zahlen bleibt diese Eigenschaft unberührt. Da die Primzahlen, die ausreichend groß sind um Summe von vier natürlichen Zahlen zu sein, stets ungerade sind, kann die Summe vier aufeinander folgender natürlicher Zahlen keine Primzahl sein.

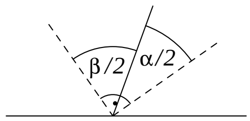
Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010615:

Von jeder Station aus kann man 14 andere Stationen erreichen. Also braucht man $15 \cdot 14 = 210$ Fahrkarten. Dabei wurde angenommen, daß die beiden entgegengesetzten Fahrtrichtungen zwischen zwei Orten verschiedene Verbindungen sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010616:



Die Nebenwinkel seien α und β. Für sie gilt also $\alpha+\beta = 180°$. Die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und einem gemeinsamen Schenkel sind also $\alpha/2$ bzw. $\beta/2$. Der Winkel zwischen den Halbierenden beträgt also: $\alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2 = 90°$, d. h. die beiden bilden einen rechten Winkel.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010621:

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist die geflogene Strecke geteilt durch die dafür benötigte Zeit. Für die AN-10 ermittelt man $25\,300\text{ km} : 48\frac{7}{60}\text{ h} = 525{,}8\text{ km/h}$, für die IL-18 dagegen $25\,300\text{ km} : 44\frac{36}{60}\text{ h} = 567{,}3\text{ km/h}$. Die Maschinen flogen also durchschnittlich rund 526 km bzw. 567 km in einer Stunde.

Bemerkung: Zum einfacheren Rechnen kann man die Flugzeit auch erst in Minuten umrechnen (man erhält 2 887 Minuten bzw. 2 676 Minuten), dann die geflogene Strecke pro Minute ausrechnen (8,763 km/min bzw. 9,454 km/min) und schließlich die Zahlenwerte mit 60 multiplizieren, um das gewünschte Ergebnis in km/h zu erhalten.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010622:

An den ersten beiden Tagen wurden $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$ des Weges zurückgelegt. Die 1 000 km des letzten Tages entsprechen also $\frac{4}{15}$ des gesamten Weges. Damit entsprechen $\frac{1}{15}$ des Weges 250 km.

a) Am ersten Tag wurden $6 \cdot 250\text{ km} = 1\,500\text{ km}$ und am zweiten Tag $5 \cdot 250\text{ km} = 1\,250\text{ km}$ zurückgelegt.

b) Zusammen ergibt das eine Gesamtstrecke von 3 750 km.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010623:

Roberts Aussage war falsch. Die Möglichkeit, dass Rudolf *und* Emil Recht haben, besteht nicht, weil sich die Aussagen der beiden widersprechen. Deshalb hat keiner von beiden Recht. Das bedeutet, dass die Entfernung bis Neustadt weder größer noch kleiner als 5 km war. Sie betrug demnach genau 5 km.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Biallas

Lösung 010624:

(Bild) Man konstruiere die Mittelsenkrechte zur Strecke AP. Alle auf ihr liegenden Punkte haben einen gleich großen Abstand zu A und P, dies folgt aus der Kongruenz (SWS) der Dreiecke AMX und PMX. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit dem anderen Schenkel des Winkels ist daher der gesuchte Punkt X.

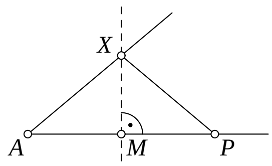


Bild 1:

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020611:

a) Die Schüler sammelten $(15\,000 : 5)$ dt $= 3\,000$ dt,

b) die Bauern mit der Kombine $(15\,000 : 3)$ dt $= 5\,000$ dt

c) und die anderen $7\,000$ dt.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020612:

a) Es werden $60 \cdot 2{,}40$ DM $= 144$ DM eingespart.

b) Bei 83 Maschinen ist die Einsparung sogar 199,20 DM.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020613:
Pauls Mutter ist 40 Jahre. Sein Vater ist 5 Jahre älter, also 45. Lotte ist damit 15, für Emil folgen 11 und für Paul selbst 8 Jahre.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020614:
Aus a) folgt, dass der Ingenieur nicht Baumann heißt. Aus b), dass der Herr Hahn nicht Elektriker ist. Da er mit d) auch nicht Ingenieur ist, ist er der Monteur. Für Herrn Baumann bleibt der Elektriker, weil er nicht Ingenieur ist und der Monteur schon bekannt ist. Herr Eichler ist also der Ingenieur.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020615:
Es müssen

a) alle parallel liegen,

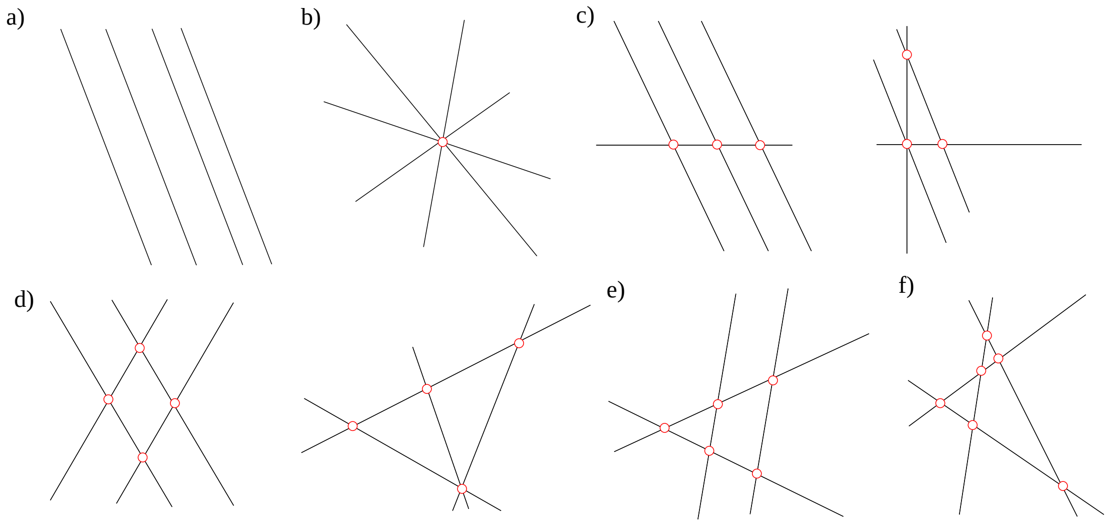
b) alle sternförmig durch einen Punkt gehen,

c) entweder drei parallele Geraden von der vierten geschnitten oder ein Dreieck von der vierten in einem Eckpunkt berührt werden,

d) entweder je zwei paarweise parallel liegen oder ein Dreieck von der vierten Gerade so durchquert werden, dass sie es in einem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite schneidet,

e) genau zwei von den vier Geraden parallel zueinander sein und

f) es dürfen keine zwei Geraden parallel zueinander sein.



Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020616:
Wenn man $(a+b)$ und $(a-b)$ aneinanderlegt, erhält man ein Strecke der Länge $(a+b)+(a-b)=(a+a)=9$ cm. Die Strecke a ist also 4,5 cm lang. Dann ist $b=1{,}5$ cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020621:

a) Die zurückgelegte Strecke je Stunde ist $41\,000\,\text{km} : (88 : 60) \approx 28\,000\,\text{km}$.

b) Das ist das 3 600fache dessen, was es in einer Sekunde schafft, nämlich 7,8 km.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020622:

Die benötigte Anzahl an Umdrehungen ist $30\,\text{mm} : \frac{1}{4}\,\text{mm} = 120$ Umdrehungen. Also braucht man 30 s für die Bohrung.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020623:

Die ursprüngliche Zahl sei $10a + b$, wobei $1 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gelten muss. Damit lautet die Gleichung

$$10b + a = 4\frac{1}{2}(10a + b) = 45a + 4\frac{1}{2}b$$

oder zusammengefasst $44a = \frac{11}{2}b$ bzw. $88a = 11b$ bzw. $8a = b$. Unter Berücksichtigung der zulässigen Werte für a und b folgt eindeutig $a = 1$ und $b = 8$. Die ursprüngliche Zahl ist also 18.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020624:

Brigittes Alter sei a Jahre. Dann ist ihre Mutter $3a$ und ihr Vater $3a + 4$ Jahre alt. Also gilt:

$$a + 3a + (3a + 4) = 7a + 4 = 88.$$

Die Lösung ist $a = 12$, also ist Brigitte 12 Jahre alt und folglich ihre Mutter 36 Jahre und ihr Vater 40 Jahre alt.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 020625:

Man kann sich die Punkte A, B und P als ein Dreieck denken. Wenn zwei Winkel (die bei B und P) gleich sind, muss es gleichschenklig sein. Die Basis ist BP, die Schenkel sind $AB = AP$. Also muss man von A aus die Strecke $\overline{AB} = 5$ cm auf dem anderen Schenkel des Winkels α abtragen, um den Punkt P zu erhalten.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030611:

a) Im Jahr 1962 wurden rund 20 Milliarden DM für kulturelle, soziale und gesundheitliche Zwecke ausgegeben.

b) Im Jahr 1958 waren es $\frac{15\,000}{17}$ DM ≈ 882 DM, also wurden rund 900 DM ausgegeben. Im Jahr 1962 waren es dagegen 1176 DM, das sind rund 1200 DM.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030612:
Der Bus hat $\frac{9}{10}$ der Strecke in einer halben Stunde zurückgelegt. Da $\frac{1}{10}$ des Weges 2 km beträgt, legte der Bus somit 18 km in einer halben Stunde zurück, d. h. er fuhr 36 km in einer Stunde.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030613:

a) Da in der Folge der natürlichen Zahlen jede zweite Zahl gerade ist, muß bei den drei Zahlen mindestens eine durch 2 teilbar sein. Diese zweistellige Zahl ist somit keine Primzahl.

b) Da außerdem bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen stets genau eine Zahl durch 3 teilbar ist, kommen die Zahlen 2 und 3 als Primfaktoren in mindestens einer dieser Zahlen vor.

Anmerkung: Die Primfaktoren 2 und 3 müssen aber nicht zwangsläufig in derselben Zahl vorkommen, wie bspw. bei 15, 16, 17 - hier kommt der Primfaktor 2 in 16 aber 3 in 15 vor.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030614:
Fallunterscheidung:

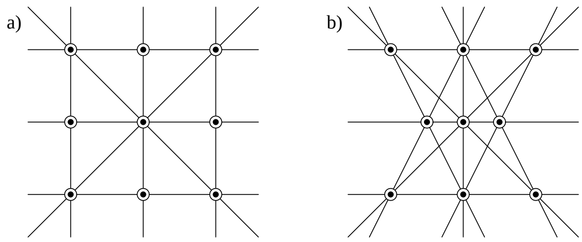
(1) Wenn Peter eine gerade Anzahl Streichhölzer in die Hand nimmt, bleibt bei ihm eine gerade Anzahl übrig. Sagt der Vater: „gerade“, so bleibt bei ihm ebenfalls eine gerade Anzahl übrig. Die Anzahl der übriggebliebenen Hölzer ist (als Summe zweier gerader Zahlen) gerade. Sagt der Vater aber: „ungerade“, so verbleibt eine ungerade Anzahl und die Anzahl aller übriggebliebenen Streichhölzer ist (als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl) ungerade. Peter sagt also dasselbe wie der Vater.

(2) Wenn Peter eine ungerade Anzahl Streichhölzer in die Hand nimmt, gilt: sagt der Vater: „gerade“, so ist die Anzahl aller übriggebliebener Hölzer ungerade, sonst ist die Anzahl der Hölzer gerade. Peter muß hier also das Gegenteil des Vaters sagen.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030615:

Die gesuchten Geraden sind nachfolgend abgebildet:



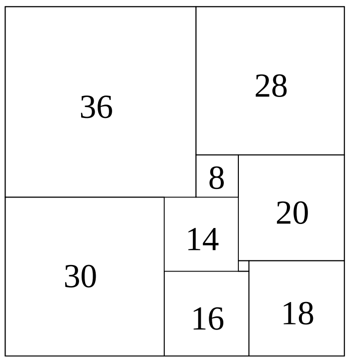
Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 030616:

Ein Weg zur Vereinfachung des Probierens ist folgender: man überlege sich, wieviel Fläche von allen Quadraten insgesamt bedeckt wird. Dann stelle man anhand der Quadratgrößen weitere Überlegungen an und finde ein Rechteck, in das die Quadrate passen müßten. Dann versuche man, durch Probieren die Lösung zu finden.

Das neue Rechteck hat einen Flächeninhalt von

$$\begin{aligned} A &= (2^2+8^2+14^2+16^2+18^2+20^2+28^2+30^2+36^2)\text{mm}^2 \\ &= 4224\text{mm}^2 \\ &= 2^7 \cdot 3 \cdot 11\text{mm}^2 \\ &= 66 \cdot 64\text{mm}^2 \end{aligned}$$



Die Überlegung, wie es zur Aufteilung $66 \cdot 64\text{mm}^2$ kommt, ist folgende: das Rechteck habe ohne der Beschränkung der Allgemeinheit eine längere oder gleich lange Höhe als Breite. Dann muß die Breite mindestens 36 mm betragen, da ein Quadrat dieser Länge und Breite enthalten sein soll.

Der nächstgrößere natürliche Teiler, den 4224 hat, ist 44. Daher müßte neben dem 36er Quadrat eine Fläche von einer Breite von 6 mm bedeckt sein. Mit den gegebenen Flächen ist dies nicht möglich.

Der nächstgrößere natürliche Teiler, den 4224 hat, ist 48. Daher müßte neben dem 36er Quadrat eine Fläche von einer Breite von 10 mm bedeckt sein. Dies ginge durch Nebeneinanderlegen vom 2er und 8er Quadrat. Dies würde aber nicht über die gesamte Höhe reichen.

Der nächstgrößere natürliche Teiler, den 4224 hat, ist 64. Damit sind wir bei o.g. Höhe-Seiten-Aufteilung des entstehenden Rechtecks. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht (es sei denn, man vertauscht Höhe und Breite). Es ist also ein Rechteck aus den Quadraten lückenlos zu belegen, das die Abmessungen $64\text{ mm} \cdot 66\text{ mm}$ hat.

Schnell wird man feststellen, daß es günstig ist, das größte Quadrat in eine Ecke zu legen und daneben die beiden nächstgrößeren Quadrate anzulegen (in jeweils anderen Richtungen). Man erhält dabei schon die endgültige Höhe und Breite des Rechtecks. Mit ein wenig Probieren kommt man dann zu einem Ergebnis, das dem angegebenen bis auf Spiegelung und Drehung gleichen muß.

Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe genügt die Angabe einer gültigen Bedeckung des Rechtecks.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030621:

Da die Schallwellen für eine Strecke von 2 m rund $\frac{1}{170}$ Sekunde benötigen, die Rundfunkwellen aber für 1 000 km nur $\frac{1}{300}$ Sekunde brauchen, hört der Rundfunkhörer den Redner etwas früher.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 030622:

a) Die folgende Zeichnung stellt in roter Farbe den Verlauf des Lichtstrahles dar. Eine weitere Reflexion tritt nicht auf, da der bei D reflektierte Lichtstrahl nicht mehr auf den Spiegel 2 trifft.

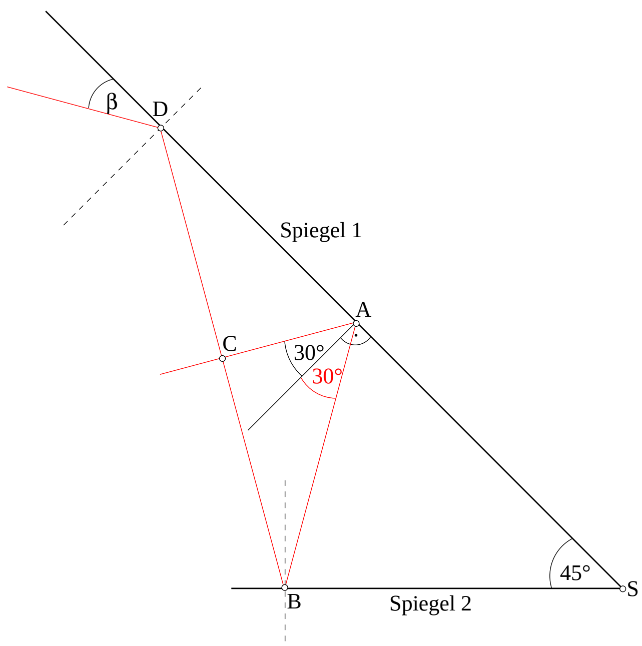
Die kann man wie folgt beweisen: Der Einfallswinkel bei A beträgt 30°, also auch der Reflexionswinkel, und damit ist der Winkel $\sphericalangle BAS = 60°$. Nun ergibt sich nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔBAS für den Winkel $\sphericalangle ABS$:

$$\sphericalangle ABS = 180° - 45° - 60° = 75°.$$

Der Einfallswinkel ergibt sich als Ergänzung zu 90°, also ist der Winkel $\sphericalangle ABC = 2 \cdot 15° = 30°$ als Summe von Einfalls- und Reflexionswinkel. Im Dreieck ΔBSD gilt dann:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BDS &= 180° - \sphericalangle ASB - \sphericalangle ABS - \sphericalangle ABC \\ &= 180° - 45° - 75° - 30° \\ &= 30°. \end{aligned}$$

Damit beträgt auch $\beta = 30°$. Dieser Winkel ist kleiner als $\sphericalangle BSD$, weshalb der letzte Lichtstrahl den Spiegel 1 nicht mehr treffen wird.



b) Gesucht ist Winkel $\sphericalangle BCA$. Nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔABC ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCA &= 180° - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC\\ &= 180° - 2 \cdot 30° - 30°\\ &= 90°.\end{aligned}$$

Der gesuchte Winkel ist also ein rechter Winkel.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 030623:

Man schlägt um A und um B Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muß. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, und diese läßt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 030624:

Man erhält insgesamt 400 Quadrate. In jeder horizontalen Reihe liegen 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ horizontal liegende Streichhölzer. In jeder vertikalen Reihe liegen ebenfalls 20 Streichhölzer, also gibt es zusammen $20 \cdot 21 = 420$ vertikal liegende Streichhölzer. Daher werden insgesamt 840 Streichhölzer benötigt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040611:

Es wären 1 728 Erdarbeiter erforderlich.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040612:

Man kann die Wörter „Junge Welt" ohne Überspringen genau 56 mal lesen.

Bemerkung für den Lehrer (wird nicht von Schülern der Klasse 6 verlangt): Von jedem Buchstaben, der nicht in der letzten Zeile oder in der letzten Spalte steht, kann man entweder zum rechts daneben stehenden Buchstaben (Schritt a) oder zum darunter stehenden Buchstaben (Schritt b) weitergehen. Jeder Möglichkeit, das Wort „Junge Welt" in der angegebenen Weise zu lesen, ist also eine Folge von Schritten zugeordnet.
z.B. ist a a b a b a b a
der Folge

$$\begin{array}{ccccccccccc}
J & \overset{a}{-} & U & \overset{a}{-} & N & & & & & & \\
 & & & & |_b & & & & & & \\
 & & & & G & \overset{a}{-} & E & & & & \\
 & & & & & & |_b & & & & \\
 & & & & & & W & \overset{a}{-} & E & & \\
 & & & & & & & & |_b & & \\
 & & & & & & & & L & \overset{a}{-} & T
\end{array}$$

zugeordnet. Die Aufgabe besteht nun in der Berechnung der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 Buchstaben a und 3 Buchstaben b.
Diese ist $\dfrac{(5+3)!}{5!\cdot 3!} = 56$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040613:

Da es keine rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecke gibt, die gleichseitig sind, bleiben 2 Fächer unbenutzt. Die Anzahl der Fächer hätte also 7 betragen müssen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040614:

Der erste Summand ist doppelt so groß wie seine Hälfte, der zweite 6 mal und der dritte 5 mal so groß wie diese Hälfte. Insgesamt besteht die Summe 390 also aus 13 Summanden, von denen jeder halb so groß wie der gesuchte erste Summand ist. Auf diese Weise findet man die drei Summanden 60, 180 und 150.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040615:

Man untersucht die Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 6 den Rest 5 lassen, also 5, 11, 17, ...

Dann streicht man von diesen die Zahlen, die bei Division durch 5 nicht den Rest 4 lassen u.s.w. Man findet dadurch 59 als kleinste natürliche Zahl, die den Forderungen genügt.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040616:

Es handelt sich um einen Pyramidenstumpf. (Die Modelle müssen auf Genauigkeit überprüft werden.)

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040621:

$8\frac{1}{3}$ m, $1\ \frac{2}{3}$ m

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040622:

54°, 126°, 54°, 126°

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040623:

218 m Zaun kosten	2 071 MDN
1 Tor kostet	64 MDN
110 Zementsäulen kosten	1 210 MDN
zusammen	3 345 MDN

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 040624:

Aus der ersten Angabe erfolgt, daß die Klasse mindestens 26, höchstens 38 Schüler haben kann. Die letzte Angabe schränkt diese Möglichkeit auf die Zahlen 30 bzw. 36 ein. Von diesen Zahlen erfüllt nur 30 alle Bedingungen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050611:

a) Der eine Radfahrer hat nach $2\frac{1}{2}$ Std. insgesamt $2\frac{1}{2} \cdot 20\,\text{km} = 50\,\text{km}$, der andere in der gleichen Zeit $2\frac{1}{2} \cdot 15\,\text{km} = 37,5\,\text{km}$ zurückgelegt. Nach $2\frac{1}{2}$ Std. beträgt daher ihre Entfernung voneinander (in Kilometern) $119 \cdot (50 + 37,5) = 31,5$.

b) In $\frac{1}{5}$ Std., also in 12 min fährt der eine Radfahrer 3 km, der andere 4 km. Beide legen also in 12 min zusammen 7 km zurück. Daher treffen sie einander nach $\frac{119}{7} \cdot 12\,\text{min} = 17 \cdot 12\,\text{min}$. In dieser Zeit hat der eine Radfahrer $17 \cdot 3\,\text{km}$, der andere $17 \cdot 4\,\text{km}$ zurückgelegt. Der Treffpunkt liegt also 51 km von der einen und 68 km von der anderen Stadt entfernt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 050612:

Bezeichnet man die Anzahl der Zehner mit a und die der Einer mit b, dann lautet die erste Zahl $(10a + b)$ und die zweite $(10b + a)$.

Nach Aufgabe gilt:

$$a + b = 10 \qquad \text{und} \tag{1}$$
$$2(10a + b) = (10b + a) + 1. \tag{2}$$

Die linke Zahl in (2) ist gerade. Wäre a gerade, so wäre die rechte Zahl ungerade. Also muß a ungerade und damit (wegen $a + b = 10$) auch b ungerade sein.

Die rechte Seite von (2) ist höchstens gleich $10b + 10$. Wäre a größer oder gleich b, dann wäre die linke Seite mindestens gleich

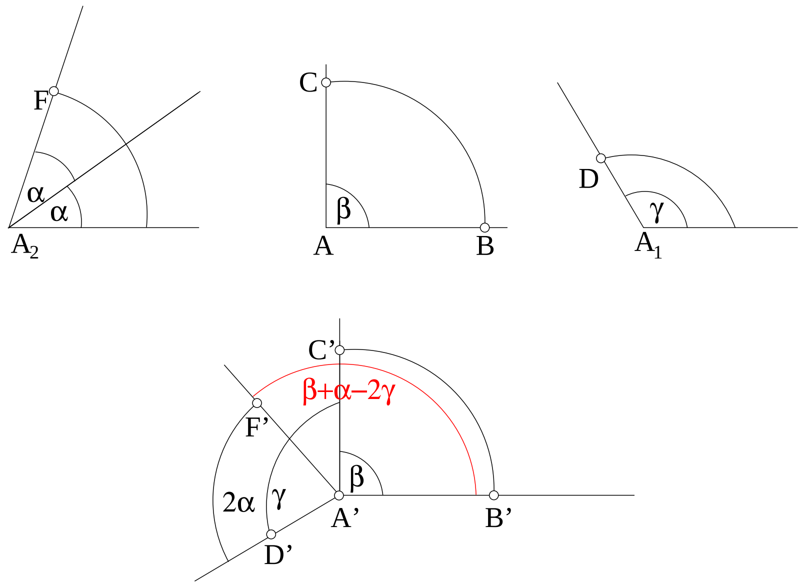
$$2(10b + b) = 22b = 10b + 12b.$$

Das ist aber (wegen $b \geq 1$) sicher größer als $10b + 10$, daher muß b größer als a sein. Es kommen als Lösung mithin nur die beiden Zahlenpaare $a = 1$; $b = 9$ und $a = 3$; $b = 7$ in Betracht. Durch Probieren findet man sofort, daß $a = 3$; $b = 7$ das einzige Zahlenpaar ist, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Die gesuchte Zahl lautet also 37.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 050613:

a) siehe Abbildung:



b) Konstruktionsbeschreibung:

Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt A'. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt A und um A' je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius. Der Kreisbogen um A schneidet die Schenkel des Winkels β in den Punkten B und C. Der Kreisbogen um A' schneidet den Strahl im Punkt B'. Dann schlage ich um B' mit BC als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch B' in C' schneidet. Ich verbinde A' mit C'. Dann ist $\sphericalangle B'A'C'$ der verlangte Winkel β.

Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt A' an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel γ an. Dabei erhalte ich (siehe Abb.) den Punkt D'.

Schließlich trage ich in A' an $A'D'$ im Uhrzeigersinne den Winkel 2α an (der Winkel 2α wurde vorher in der für den Winkel $(\beta + \gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt F'.

Der Winkel $\sphericalangle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta - \gamma - 2\alpha)$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 050614:

Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, daß ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1\,600$. Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genausoviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volummen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1 600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 050621:

Wenn die monatlich hergestellte Anzahl Tische im Juni j beträgt, dann wurden im Mai $j-10$ Tische hergestellt, im April $j-20$ u.s.w. bzw. im August $j+10$ u.s.w.

Damit ergibt sich eine Jahresproduktion von:

$$\begin{aligned} 1\,920 &= (j-50)+...+(j-10)+j+(j+10)+...+(j+50)+(j+60) \\ 1\,920 &= 12\cdot j+60 \\ 1\,860 &= 12\cdot j \\ j &= 155. \end{aligned}$$

Im Juni wurden 155 Tische hergestellt. Im Dezember sind dies $j+60=215$ Stück.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 050622:

Ein voller Winkel beträgt 360°, d.h es gilt: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\psi+\omega=360°$. Setzt man nun die Gleichungen (1) und (2) nacheinander ein, erhält man einen Wert für α:

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma+\delta+\psi+\omega &= 360° \\ \alpha+\beta+252° &= 360° \\ \alpha+\frac{1}{3}\alpha &= 108° \\ 4\cdot\alpha &= 324° \\ \alpha &= 81° \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\beta=\frac{\alpha}{3}=27°$. Ferner ist δ der Scheitelwinkel von α und damit genauso groß wie α, also $\delta=81°$. Selbiges gilt für ψ und β, also $\psi=27°$. Die fehlende Differenz zu 360° verteilt sich zu gleichen Teilen auf die Scheitelwinkel γ und ω. Diese Winkel ergeben sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} \gamma+\omega &= 360°-\alpha-\beta-\delta-\psi \\ 2\cdot\gamma &= 360°-81°-27°-81°-27° \\ \gamma &= 72°. \end{aligned}$$

Und damit wie bereits erwähnt: $\omega=72°$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 050623:

Da 4 und 9 teilerfremd sind, muß wegen (2) b auch durch $4 \cdot 9 = 36$ teilbar sein. Es wird nun eine Tabelle der infragekommenden Zahlen erstellt, dabei werden nur Zahlen aus dem gemäß (1) geforderten Bereich betrachtet:

$36 \cdot k = b$	$b - 6$	$11\|(b-6)$?	$8\|b$?	$27\|b$?
72	66	ja	ja	
108	102	nein		
144	138	nein		
180	174	nein		
216	210	nein		
252	246	nein		
288	282	nein		
324	318	nein		
360	354	nein		
396	392	nein		
432	426	nein		
468	462	ja	nein	nein
504	498	nein		
540	536	nein		
576	570	nein		

Wie leicht ersichtlich, ist $b = 468$ die einzige Lösung, die sämtliche Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 050624:

Es seien die Größen aller Kinder durch den ersten Buchstaben ihres Vornamens repräsentiert. Dann gilt:

$$i = m - 2 \tag{1}$$
$$e = g \tag{2}$$
$$j < i \tag{3}$$
$$h < j \tag{4}$$
$$h \leq m \tag{5}$$
$$g = m - 2 \tag{6}$$
$$j < m \tag{7}$$

Außerdem ist Hans nicht der Kleinste.

Es gibt keine direkte Aussage über Renates Größe.

Alle anderen Kinder sind kleiner als Monika: i, j, g, h nach (1), (5), (6), (7) sowie dann e wegen (2).

Mit (3) und (4) gilt: $h < j < i$, also $h < j < i < m$.

Betrachtet man (1), (2) und (6), so ergibt sich: $i = g = e = m-2$, also insgesamt: $h < j < (e = g = i) < m$. Zieht man noch in Betracht, daß Hans nicht der Kleinste ist, so muß Renate die Kleinste sein. Damit gibt es folgende Reihenfolge: $r < h < j < (e = g = i) < m$.

Also ergeben sich die Antworten:

a) Die drei Schüler Eva, Gerd und Ingrid sind gleich groß. Alle anderen Schüler haben paarweise verschiedene Größen.

b) Die Reihenfolge, beginnend beim größtem Schüler lautet: Monika, Eva, Gerd, Ingrid, Jürgen, Hans, Renate.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060611:

Die Fläche kann man sich als Rechteck mit zwei abgeschnittenen Dreiecksflächen sowie einem ausgeschnittenen kleinen Rechteck vorstellen. Entsprechend gilt die folgende Gleichung (Angaben in Zentimetern):

$$\begin{aligned} A &= 4,5 \cdot 9 - 2 \cdot \frac{0,4 \cdot 0,4}{2} - 3 \cdot 3 \\ &= 40,5 - 0,16 - 9 \\ &= 31,34 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der abgebildeten Figur beträgt rund 31 cm^2.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060612:

Diese Aufgabe kann man durch systematisches Probieren oder mittels des folgenden Gleichungssystemes lösen, dabei seien a die Anzahl der gekauften Hefte zu 8 Pf und b die Anzahl der gekauften Hefte zu 15 Pf:

$$a \cdot 8 + b \cdot 15 = 131 \qquad (1)$$
$$a + b = 12 \qquad (2)$$

Setzt man nun (2) in (1) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 8 \cdot (12 - b) + 15b &= 131 \\ 96 - 8b + 15b &= 131 \\ 7b &= 35 \\ b &= 5 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Heinz kauft 7 Hefte zu 8 Pf und 5 Hefte zu 15 Pf und gibt dabei für die $5 + 7 = 12$ Hefte $7 \cdot 8 + 5 \cdot 15 = 56 + 75 = 131$ Pfennig bzw. 1,31 MDN aus.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

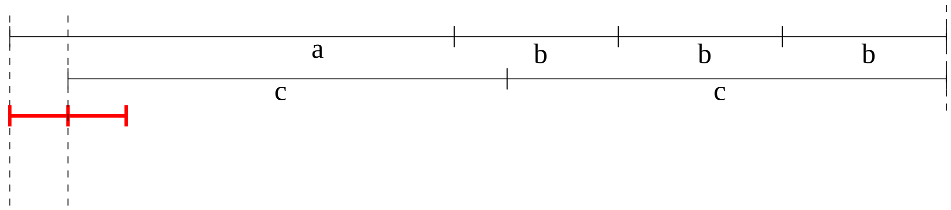
Lösung 060613:

Es wird zunächst eine Gerade gezeichnet und die Strecke AB darauf abgetragen. An B wird die Strecke CD abgetragen, am Endpunkt noch einmal dieselbe Strecke CD und schließlich noch einmal.

Nun muß die Strecke EF zweimal am Endpunkt in entgegengesetzter Richtung, also in Richtung Anfangspunkt abgetragen werden. Die entstehende Strecke zwischen altem Anfangs- und neuem Endpunkt hat eine

Länge von $a + 3b - 2c$.

Die nun vorhandene Strecke muß noch verdoppelt werden. Die dann entstandene Strecke hat die gesuchte Länge (in der Abbildung rot dargestellt).



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060614:

Die Mietsparteien werden durch den jeweils ersten Buchstaben ihrer Namen dargestellt.

a) Es handelt sich um 16 Parteien, die jeweils zu zwei Parteien eine Etage bewohnen. Daher hat das Haus neben dem Erdgeschoß noch 7 Stockwerke.

b) Es gelten die folgenden Beziehungen:

(1) $a + 2 = b$

(2) $c + 6 = b$

(3) $f = g$

(4) $n + 4 = m$

(5) $m + 2 = f$

(6) $n + 1 = o$

(7) $r + 3 = a$

(8) $p + 5 = g$

Aus den Gleichungen (1), (2), (7) entsteht die folgende 1. und aus den Gleichungen (3), (4), (5), (6) die 2. und aus (8) die 3. Zeile:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathrm{c}+6 & = & \mathrm{r}+5 & = & ?+4 & = & ?+3 & = & \mathrm{a}+2 & = & ?+1 & = & \mathrm{b} \\
\mathrm{n}+6 & = & \mathrm{o}+5 & = & ?+4 & = & ?+3 & = & \mathrm{m}+2 & = & ?+1 & = & \mathrm{f}=\mathrm{g} \\
 & & \mathrm{p}+5 & & & & & & & & & = & \mathrm{g}
\end{array}$$

Aus der 2. und 3. Zeile folgt, daß o und p auf derselben Etage wohnen. Es gibt ferner nur die Möglichkeiten, daß c oder n oder (c und n) im Erdgeschoß oder (c und n) im 1. Stock wohnen.

Sind c und n Etagennachbarn, würden auch r, o und p Etagennachbarn sein. Dies widerspricht der Aussage, daß es genau 2 Parteien pro Etage gibt.

Wenn n im Erdgeschoß wohnt, dann sind o, p und c Bewohner des 1. Stockes. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch, also muß c im Erdgeschoß wohnen. Folglich wohnt a im 4. Stock.

Familie Albrecht wohnt im 4. Stock.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060621:

Wenn man die Länge der zweiten Teilstrecke mit a bezeichnet, ergibt sich für die 1. Teilstrecke $2a$ und folglich für die 3. Teilstrecke $3 \cdot 2a = 6a$. Zusammen sind das $20\,\text{m} = 2a + a + 6a = 9a$. Dies ergibt für $a = \frac{20}{9}$ m.

Damit ist die 1. Teilstrecke $\frac{40}{9}$ m $\approx 4,4$ m, die 2. Teilstrecke $\frac{20}{9}$ m $\approx 2,2$ m und die 3. Teilstrecke $\frac{40}{3}$ m $\approx 13,3$ m lang.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060622:

Aus Aussage (2) ergibt sich, daß die gesuchte Zahl a durch $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ teilbar sein muß (3, 4 und 5 sind paarweise teilerfremd). Folglich muß a ein natürliches Vielfaches von 60 sein.

Der natürliche Faktor k, mit dem 60 multipliziert werden muß, um zu a zu gelangen, darf nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar sein, um Aussage (3) Rechnung zu tragen. Wegen (1) gilt $2 \leq k \leq 20$.

Für k kommen folglich nur 7, 11, 13, 17, 19 infrage. 11 entfällt, da sonst a nicht (4) genügen kann. Die verbleibenden Fälle werden nun untersucht:

$$\begin{array}{lclclcl}
60 \cdot 7 & = & 420 & \Rightarrow & 420:11 & = & 38 \text{ Rest } 2 \\
60 \cdot 13 & = & 780 & \Rightarrow & 780:11 & = & 70 \text{ Rest } 10 \\
60 \cdot 17 & = & 1\,020 & \Rightarrow & 1\,020:11 & = & 92 \text{ Rest } 8 \\
60 \cdot 19 & = & 1\,140 & \Rightarrow & 1\,140:11 & = & 103 \text{ Rest } 7
\end{array}$$

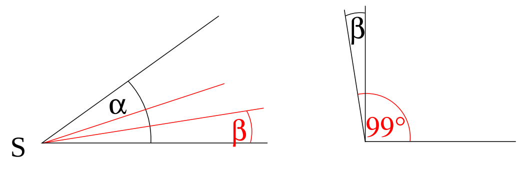
Wie leicht zu sehen, erfüllen 420, 780 und 1020 alle Bedingungen und sind damit (die einzigen) Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060623:

Wenn der gegebene Winkel halbiert wird, hat jeder Teilwinkel eine Größe von 18°. Wird einer dieser beiden neuen Winkel noch ein weiteres Mal halbiert, erhält man einen Winkel $\beta = 9°$. Die Konstruktion einer Winkelhalbierenden gehört zu den Grundkonstruktionen und braucht daher nicht näher erläutert zu werden.

Der gesuchte Winkel beträgt 99° und kann damit als Summe eines rechten Winkels und von β aufgefaßt werden. Es ist also zu einer beliebigen Geraden in einem beliebigen Punkt eine Senkrechte zu errichten (ebenfalls Grundkonstruktion) und der Winkel β anzutragen. Es entsteht der gesuchte Winkel.



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 060624:
Eine Sandsteinplatte bedeckt mit ihrer rechteckigen Form von $60\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm}$ eine Fläche von $A = 0,6\text{ m} \cdot 0,4\text{ m} = 0,24\text{ m}^2$. Damit bedecken 400 dieser Platten eine Fläche von $A_2 = 400 \cdot 0,24\text{ m}^2 = 96\text{ m}^2$.

Wenn die Platten sich so aneinander legen lassen, daß sie einen 10 m langen Streifen lückenlos bedecken können, so ergibt sich die Breite des Streifens aus der Division des Flächeninhaltes durch die Länge:

$$\begin{aligned} b &= A_2 : 10\text{ m} \\ &= 96\text{ m}^2 : 10\text{ m} \\ &= 9,6\text{ m}. \end{aligned}$$

Da die 10 m Länge durch Aneinanderreihen von 25 Sandsteinplatten entstehen kann, indem bspw. die Platten an der langen Seite aneinander stoßen, kann eine solche Terrasse mit einer Breite von 9, 6 m gebaut werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070611:

Es gibt a Anhänger und t Triebwagen: $a + t = 46 + t = 83$. Das heißt, daß es in der Stadt 37 Triebwagen gibt. Zu dem gegebenem Zeitpunkt befinden sich $8 + 23 = 31$ Triebwagen und $16 + 23 = 39$ Anhänger im Einsatz. Folglich sind zu diesem Zeitpunkt $46 - 39 = 7$ Anhänger und $37 - 31 = 6$ Triebwagen nicht im Einsatz.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070612:

Da es sich um Quadrate handelt, gilt für die Strecken $a = AB = BC = CD = DA$ sowie $b = EF = FG = GH = HE$. Außerdem gilt mit der Angabe der Breite der schraffierten Fläche von 3 cm, daß $a = b + 6$ cm. Damit kann man den Flächeninhalt der Quadrate angeben mit (Angaben in cm^2):

$$\begin{aligned} A_{klein} &= b^2 \\ A_{gross} &= a^2 = (b+6)^2 = b^2 + 12b + 36 = A_{klein} + 12b + 36 \\ A_{gross} - A_{klein} &= 12b + 36 \\ 96 &= 12b + 36 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $GH = b = 5$ cm sowie $BC = a = b + 6$ cm $= 11$ cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070613:

Von 2170 kg sind $11 \cdot 80$ kg $= 880$ kg abzuziehen, um auf das Gewicht von Gerste und Mais zusammen zu kommen. Das heißt, Gerste (g kg) und Mais (m kg) zusammen ergaben $(2170 - 880)$ kg $= 1290$ kg. Betrachtet man noch, daß $g = m + 5$, dann ergibt sich (in Kilogramm):

$$\begin{aligned} 6g + 12m &= 1290 \\ 6 \cdot (m+5) + 12m &= 1290 \\ 18m + 30 &= 1290 \\ 18m &= 1260 \\ m &= 70 \\ g &= 75. \end{aligned}$$

In jedem Sack Mais befanden sich also 70 kg, was bei 12 Säcken ein Gesamtgewicht von $12 \cdot 70$ kg $= 840$ kg ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070614:

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ endet auf 6
$4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ endet auf 4
5! und höhere Fakultäten enden immer auf 0, weil in ihnen die Faktoren 2 und 5 vorkommen und folglich ein Faktor $2 \cdot 5 = 10$ ist und damit die letzte Ziffer Null sein muß.

Die Summe s ergibt somit eine letzte Ziffer gleich der von $4 + 6 = 10$, also Null.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 070621:

Sei α' der Stufenwinkel zu α am Schnittpunkt der Geraden zwischen g_4 und g_2. Dann gilt: $\alpha' + \beta = 180°$ (Scheitelwinkel), und es ergibt sich für $\alpha' = 50°$. Damit ist $\alpha = \alpha'$. Aus der geltenden Umkehrung des Stufenwinkelsatzes kann nun geschlußfolgert werden, daß $g_1 \parallel g_2$ gilt.

Sei γ' der Stufenwinkel zu γ am Schnittpunkt der Geraden zwischen g_3 und g_2. Dann sind laut Stufenwinkelsatz an geschnittenen Parallelen ($g_1 \parallel g_2$) γ und γ' gleich groß.

Da δ der Scheitelwinkel zu γ' ist, gilt:

$$\delta = 180° - \gamma' = 180° - \gamma = 180° - 70° = 110°.$$

Der gesuchte Winkel δ ist 110° groß.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070622:

Gesucht ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 210 cm und 330 cm. Dazu werden diese beiden Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Das kgV ist also: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Das bedeutet, daß die kürzeste Strecke laut Aufgabenstellung $2310\,\text{cm} = 23{,}1\,\text{m}$ beträgt. Jedes Vorderrad legt dabei 11 und jedes Hinterrad 7 Umdrehungen zurück.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070623:

Die Anzahl geschossener Ringe jeder Person werden durch die Anfangsbuchstaben ihres Namens repräsentiert. Dann gilt folgendes:

$$g < j \qquad (1)$$
$$e + r = j + g \qquad (2)$$
$$e + j < r + g \qquad (3)$$

Setzt man (2) in (3) ein, ergibt sich:

$$e + e + r - g < r + g$$
$$2e < 2g$$
$$e < g$$

Damit ist schon mit (1) $e < g < j$ bekannt.

Weiterhin mit (2): $r = j + g - e$. Da $g > e$ ist $g - e > 0$ und damit $r > j$.

Setzt man dies in die bereits gefundene Reihenfolge ein, erhält man die folgende Gesamtreihenfolge nach fallender Ringzahl:

$$\text{Regina} > \text{Joachim} > \text{Gerd} > \text{Elke}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 070624:
Es sei die gesuchte Anzahl der Teilnehmer der Schule an der 1. Stufe mit z bezeichnet. Dann nahmen an der 2. Stufe $\frac{3}{40}z$ Schüler teil. Preise oder Anerkennungen erhielten $\frac{2}{9}$ davon, also:

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{40}z = \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 40}z = \frac{1}{60}z$$

Dieses sind nun 1 mal ein 1. Preis, 1 mal ein 2. Preis, 2 mal ein 3. Preis und 4 mal Anerkennung, insgesamt also 8 Preise und Anerkennungen.

Diese Terme sind nun gleichzusetzen, und man erhält für z:

$$\begin{aligned} \frac{1}{60}z &= 8 \\ z &= 480 \end{aligned}$$

Es beteiligten sich also 480 Schüler dieser Schule an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

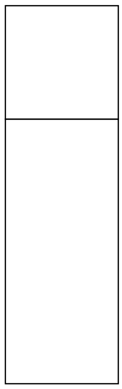
Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080611:

Die Inhaltssume beider Flächen laßt sich also wie folgt ausdrücken, wobei a eine Quadratseite, b die bekannte und c die zu ermittelnde Rechteckseite ist (Angabe in Metern bzw. Quadratmetern):



$$\begin{aligned} A_Q + A_R &= a^2 + b \cdot c \\ 3000 &= 30^2 + 30 \cdot c \\ 30c &= 2100 \\ c &= 70 \end{aligned}$$

a) Die unbekannte Rechteckseite ist 70 m lang.

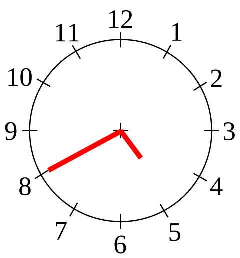
b) siehe Abbildung. Dabei muß eine Quadratseite mit 30 m Länge im Original

$$3000\,\text{cm} : 2000 = 1,5\,\text{cm}$$

in der Abbildung groß sein.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 080612:



Der große Zeiger steht auf der 8. Der kleine Zeiger liegt zwischen der 4 und 5. Zu bestimmen ist also der Winkel zwischen der 5 und 8 sowie zwischen dem kleinen Zeiger und der 5.

Der Winkel zwischen dem 5. und 8 Skalenstrich ist identisch zu dem Winkel zwischen dem 6. und 9. Skalenstrich, d.h. es handelt sich um einen rechten Winkel.

Der Winkel zwischen dem kleinen Zeiger und dem 5. Skalenstrich wird nun ermittelt: Es sind nach 40 min $\frac{2}{3}$ einer Stunde verstrichen. Daher ist der Stundenzeiger $\frac{2}{3}$ des Winkels vom 4. zum 5. Skalenstrich vorgerückt. Zwischen zwei Skalenstrichen (1 Stunde) befindet sich ein Winkel von $\frac{1}{12}$ von einem vollen Winkel, also $360° : 12 = 30°$. Mithin befindet sich der Stundenzeiger $\frac{2}{3} \cdot 30° = 20°$ vom 4. Skalenstrich bzw. $30° - 20° = 10°$ vom 5. Skalenstrich entfernt. Letzteres ist der gesuchte Winkel.

Mithin bilden der Stunden- und Minutenzeiger um 16:40 Uhr einen Winkel von $90° + 10° = 100°$ miteinander.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 080613:

Für die Limonade benötigt Rainer $13 \cdot 0,21\,\mathrm{M} = 2,73\,\mathrm{M}$. Er würde also für sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen $10,43\,\mathrm{M} - 2,73\,\mathrm{M} = 7,70\,\mathrm{M}$ ausgeben, wenn die verlangte Summe richtig wäre.

Für 6 Bockwürste bezahlt Rainer eine durch 6 und damit auch durch 3 teilbare Summe in Pfennigen. Für neun Lachsbrötchen bezahlt er einen durch 9 und damit auch durch 3 teilbaren Betrag in Pfennigen. Die Summe beider durch 3 teilbaren Beträge ist wieder ein durch 3 teilbarer Betrag (in Pfennigen). $7,70\,\mathrm{M}$ bzw. $770\,\mathrm{Pf}$ sind allerdings nicht durch 3 teilbar, was die Richtigkeit von Rainers Behauptung beweist.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 080614:

Aus (5) und (6) folgt, daß Bodo nicht Neumann heißt. Wegen (4) heißt Bodo nicht Keller, also muß Bodo mit Nachnamen Siebert heißen.

Aus (3) und der eben erhaltenen Aussage folgt, daß Alex mit Nachnamen Keller heißen muß.

Folglich handelt es sich beim 3. Pionier um Dietmar Neumann.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 080621:

Die Gesamtschülerzahl n muß ein Vielfaches der Zahlen 3, 6 und 9 sein und dabei gleichzeitig der Bedingung $20 < n < 40$ genügen. Das trifft nur auf die Zahl 36 zu.

$\frac{1}{9}$ von 36 beträgt 4, $\frac{1}{3}$ von 36 beträgt 12, $\frac{1}{6}$ von 36 beträgt 6.

Insgesamt 22 Schüler erhielten also entweder die Note 1, 2 oder 4. Demnach erreichten 14 Schüler die Note 3, denn die Differenz von 36 und 22 beträgt 14.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 080622:

Es sei a die Maßzahl der längsten, b die der zweitlängsten, c die der drittlängsten und d die der kürzesten Rolltreppe sowie g die Maßzahl der Gesamtlänge aller Rolltreppen.

Dann gilt: $b + c = 136$ und $b = c + 8$. Daraus folgt: $b = 72$ und $c = 64$.

Für die Gesamtlänge der längsten und der kürzesten Rolltreppe gilt:

$$a + d = \frac{3}{10}g + \frac{3}{14}g = \frac{36}{70}g,$$

dann ergibt sich:

$$136 = b + c = g - (a + d) = \frac{34}{70}g;$$

Daraus folgt: $\frac{1}{70}g = 4$ und demnach $\frac{3}{10}g = 84$ und $\frac{3}{14}g = 60$.

Die Längen der Rolltreppen betragen 84 m, 72 m, 64 m und 60 m.

In der Tat ergibt sich als Probe

$$72 + 64 = 136, \qquad 72 = 64 + 8,$$
$$84 = \frac{3}{10}(84 + 72 + 64 + 60),$$
$$60 = \frac{3}{14}(84 + 72 + 64 + 60).$$

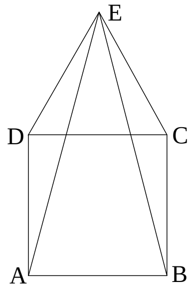
Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 080623:

Im Dreieck ΔAED gilt: (siehe Abb.) $\overline{AD} = \overline{DE}$ (nach Konstruktion)

(1) Daraus folgt $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:

(2) $\overline{\sphericalangle EDA} = \overline{\sphericalangle EDC} + \overline{\sphericalangle CDA} = 150°$; ($\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$) denn $\overline{\sphericalangle EDC} = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\overline{\sphericalangle CDE} = 90°$ (Winkel im Quadrat).



Aus (1), (2) und $\overline{\sphericalangle AED} + \overline{\sphericalangle EDA} + \overline{\sphericalangle DAE} = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\overline{\sphericalangle AED} = 15°$.

Entsprechend ist $\overline{\sphericalangle BEC} = 15°$, also $\overline{\sphericalangle AEB} = \overline{\sphericalangle DEC} - \overline{\sphericalangle AED} - \overline{\sphericalangle BEC} = 30°$.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

Lösung 080624:

(a) Nach 15 Minuten würden die drei Freunde unter den Bedingungen der Aufgabe erstmalig wieder gleichzeitig die Startlinie S erreichen.

Beweis hierzu: Helmut brauchte für jede Runde genau 300 Sekunden, Klaus genau 225 Sekunden und Manfred genau 180 Sekunden. Das k.g.V. von 225, 300 und 180 beträgt 900, und 900 Sekunden sind gleich 15 Minuten.

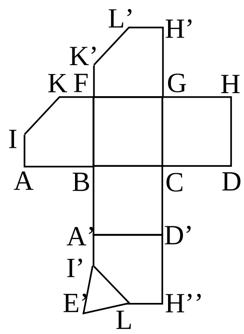
(b) In 15 Minuten würden Helmut genau 3, Klaus genau 4 und Manfred genau 5 Runden zurücklegen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (13)

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090611:



Es gibt mehrere Möglichkeiten, ein solches Netz aufzuzeichnen. Eine davon ist die abgebildete Variante.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090612:
Die Aussage ist gleichbedeutend mit:

$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in 6 Tagen 6 Eier.

$4 \cdot 1\frac{1}{2}$ Hühner legen in 6 Tagen $4 \cdot 6$ Eier.

6 Hühner legen in 6 Tagen 24 Eier.

1 Huhn legt in 6 Tagen 4 Eier.

7 Hühner legen in 6 Tagen 28 Eier.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090613:
Es sei z die Anzahl aller zum Wettbewerb eingesandten Lösungen. Es gilt dann:

(1) Genau vier richtig: $\frac{3}{25}z$

(2) Genau zwei richtig: $\frac{6}{25}z$

(3) Genau eins richtig: $4 \cdot \frac{3}{25}z$

(4) Keins richtig: 240

Damit gilt, daß die Summe dieser vier Fälle z ergibt:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3}{25}z + \frac{6}{25}z + 4 \cdot \frac{3}{25}z + 240 \\ z &= \frac{21}{25}z + 240 \\ \frac{4}{25}z &= 240 \\ z &= 1\,500 \end{aligned}$$

Zum Wettbewerb gab es genau 1 500 Einsendungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090614:

Die Arbeitsgemeinschaft bestehe aus x Mitgliedern. Bei gleichmäßiger Verteilung des Geldes auf alle Mitglieder würde es pro Kopf einen Betrag von a geben, d.h. $a \cdot x = 240$. Es muß gelten, daß x ein ganzzahliger Teiler von 240 ist.

Der Anteil von 3 Mitgliedern ermöglichte einen um 4, – M höheren Anteil aller übrigen Mitglieder. Dies läßt sich auch so ausdrücken:

$$\begin{aligned} 240 = (x-3)\cdot(a+4) = ax - 3a + 4x - 12 &= 240 - 3a + 4x - 12 \\ 4x - 3a &= 12 \\ 4x - 3 \cdot \frac{240}{x} &= 12 \\ x^2 - 3x - 180 &= 0 \\ (x+12)\cdot(x-15) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt wird Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Damit ergeben sich unmittelbar die Lösungen: $x = -12$ (Widerspruch dazu, daß x eine natürliche Zahl ist) sowie $x = 15$. Die Arbeitsgemeinschaft hatte also 15 Mitglieder.

Hinweis: Durch systematisches Probieren kann der Schüler auch zu dieser Lösung gelangen.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 090621:

Da genau ein Drittel der Fahrer (die Anzahl der Fahrer sei z) vor und $\frac{1}{2}z$ hinter Klaus lag, ist die Summe aus einem Drittel, der Hälfte und eins (nämlich Klaus selbst) gleich der Gesamtfahrerzahl z:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}z + 1 + \frac{1}{2}z \\ z &= \frac{2z+6+3z}{6} \\ 6z - 5z &= 6 \\ z &= 6. \end{aligned}$$

An dem Radrennen nahmen folglich 6 Sportler teil. Davon waren vor Klaus 2, d.h. Klaus wurde Dritter - und nach Klaus kamen drei weitere Fahrer ins Ziel.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090622:

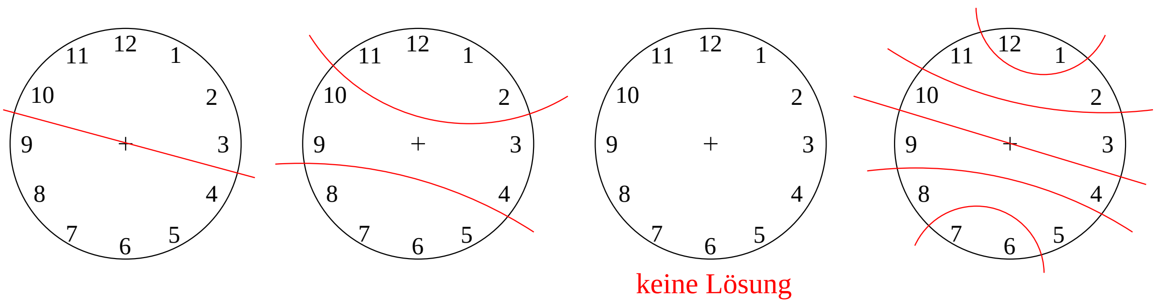
Zunächst wird die Summe aller Zahlen auf der Uhr ermittelt, dies ist:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78$$

Da 78 durch 2, 3 und 6 teilbar ist, sind die drei Fälle der Einteilung des Ziffernblattes in 2, 3 und 6 Abschnitte mit gleicher Summe aller Zahlen des Abschnittes zumindest theoretisch möglich. Ob es tatsächlich realisierbar ist, muß separat untersucht werden.

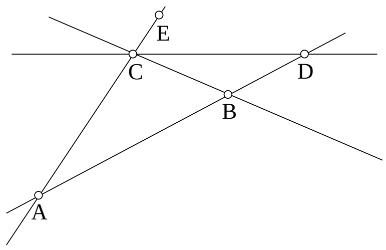
Der dritte Fall als Aufteilung in 4 Bereiche hingegen ist nicht möglich, da sonst in jedem Bereich eine Summe von $\frac{78}{4} = 19,5$ entstehen müßte, was mit natürlichen Zahlen von 1 bis 12 nicht durchführbar ist.

Die Lösungen sind in folgender Abbildung gegeben:



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090623:



Die Winkel seien wie in der Abbildung bezeichnet: $\alpha = \sphericalangle ECD = \sphericalangle ABC$ sowie $\beta = \sphericalangle BCD$, $\gamma = \sphericalangle BAC$ und $\delta = \sphericalangle ACB$. Damit gilt mit dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck ΔABC:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + \gamma &= 180^\circ \\ \delta &= 180^\circ - \alpha - \gamma. \end{aligned}$$

Für den Winkel an C gilt:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \delta &= 180^\circ \\ \delta &= 180^\circ - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Setzt man nun beide Gleichungen ineinander ein, erhält man

$$180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Es ergibt sich damit die Behauptung: $\beta = \gamma$ bzw. $\sphericalangle BCD \approx \sphericalangle BAC$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 090624:

Wenn s die Weglänge zwischen Elternhaus und Schultor ist, läuft Elke mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{30}$ pro Minute. Ihr Bruder läuft mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{20}$ pro Minute.

Elke hat an besagtem Morgen in den ersten 5 Minuten einen Weg von $\frac{5s}{30}$ zurückgelegt als ihr Bruder losgeht. Beide Kinder treffen sich nach einer Strecke t und weiteren x Minuten.

Dann gilt für Elke:

$$t = \frac{5s}{30} + \frac{s \cdot x}{30}$$

und für Jürgen:

$$t = \frac{s \cdot x}{20}$$

Nun müssen beide Gleichungen noch ineinander eingesetzt werden, und man erhält x:

$$\begin{aligned} \frac{5s}{30} + \frac{s \cdot x}{30} &= \frac{s \cdot x}{20} \\ 20 \cdot 5s + 20 \cdot s \cdot x &= 30 \cdot s \cdot x \\ 100 + 20x &= 30x \\ 10x &= 100 \\ x &= 10 \\ t &= \frac{s}{2}. \end{aligned}$$

Jürgen holte seine Schwester nach 10 Minuten ein. Dabei hatten beide bereits den halben Weg zur Schule zurückgelegt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100611:

Vom ersten Feld wurden an Kartoffeln 810 t = 8 100 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag 180 dt je ha betrug, erhalten wir für dieses Feld wegen 8 100 : 180 = 45 einen Flächeninhalt von 45 ha.

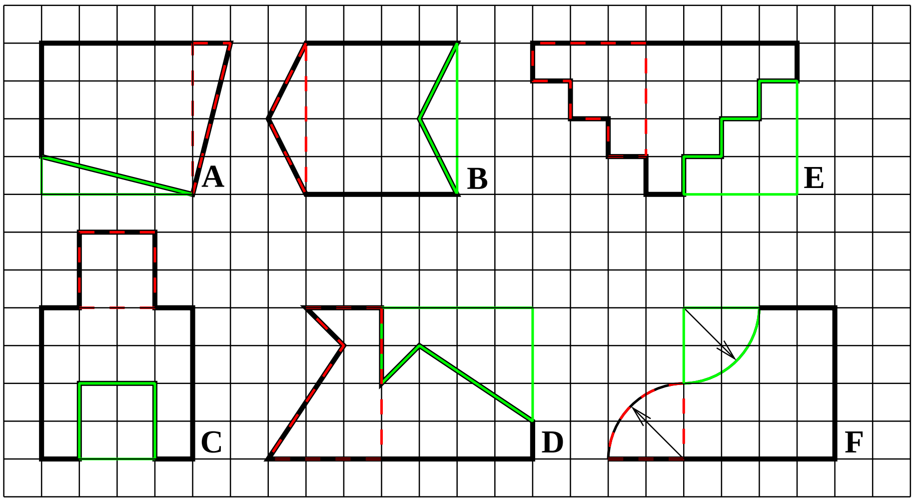
Vom zweiten Feld wurden an Kartoffeln 640 t = 6 400 dt geerntet. Da der Durchschnittsertrag hier 200 dt je ha betrug, erhalten wir für das zweite Feld wegen 6 400 : 200 = 32 einen Flächeninhalt von 32 ha.

Also ist das erste Feld größer als das zweite. Die Differenz der Flächeninhalte beträgt 13 ha, das sind 1 300 a.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100612:

Sämtliche Figuren lassen sich der Aufgabe gemäß zerlegen:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100613:

Es gibt genau 9 einstellige natürliche Zahlen ungleich Null, nämlich 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Die Summe aller dieser 9 Zahlen beträgt

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Von ihnen wurden laut Aufgabe genau 8 verwendet.

Aus den gegebenen Gleichungen erhält man durch Addition:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 10 + 16 + 14 = 40.$$

Also wurde die 5 nicht verwendet.

Eine mögliche Lösung ist z.B.:

$$a = 1, \quad b = 9, \quad c = 2, \quad d = 8, \quad e = 6, \quad f = 3, \quad g = 7, \quad h = 4.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100614:

Laut Aufgabe gibt es unter den 15 Teilnehmern mindestens 4, für die folgendes zutrifft:

der erste von ihnen erhielt genau 2 Antwortkarten,

der zweite von ihnen erhielt genau 3 Antwortkarten,

der dritte von ihnen erhielt genau 4 Antwortkarten und

der vierte von ihnen erhielt genau 5 Antwortkarten.

Diese 4 Teilnehmer erhielten folglich zusammen genau 14 Antwortkarten. Da von den restlichen 11 Teilnehmern jeder mindestens eine Antwortkarte erhielt, sind damit schon sämtliche 25 Antwortkarten verteilt. Keiner dieser 11 Teilnehmer kann daher mehr als eine Antwortkarte erhalten haben.

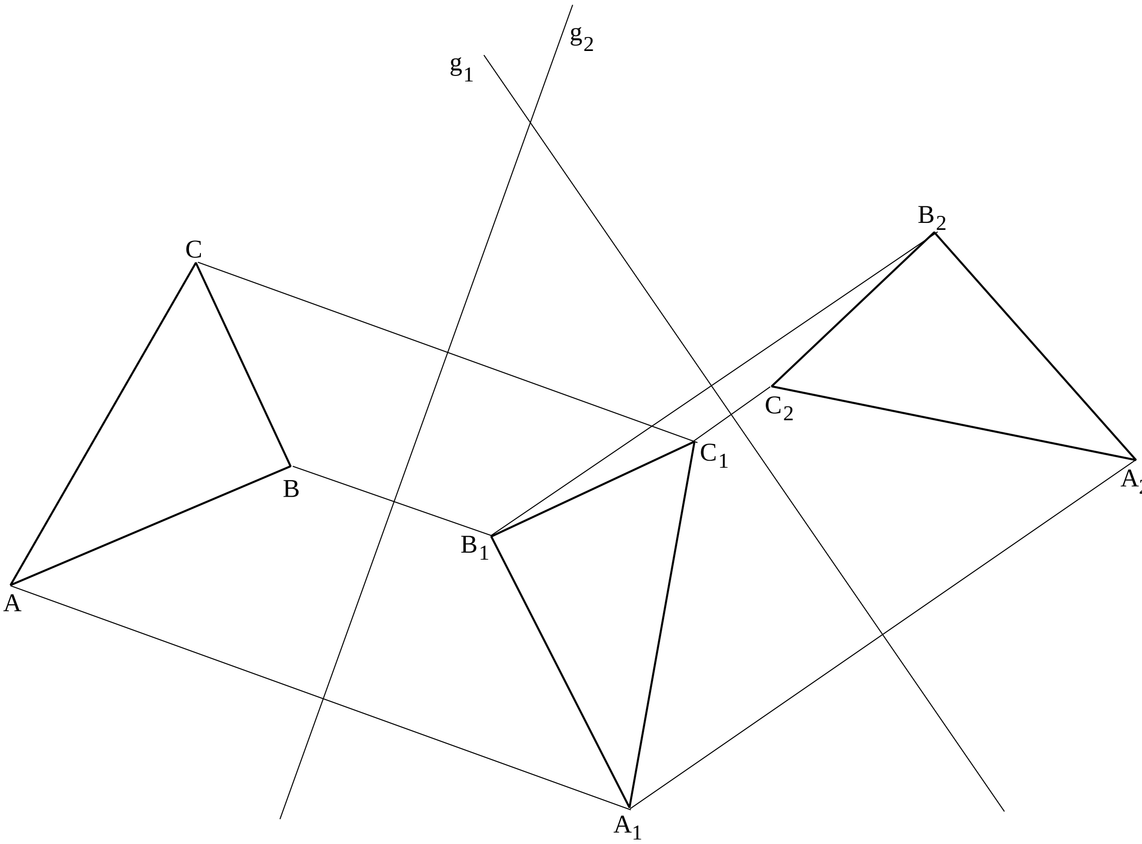
Unter den 15 erwähnten Teilnehmern gibt es mithin genau 11 mit je genau einer Antwortkarte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100621:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100622:

a) Da die Raumschiffgruppe in 88 Minuten durchschnittlich 41 000 km zurücklegte, legte sie in jeder Minute wegen $41\,000 : 88 \approx 466$ rund 466 km, in 60 Minuten also rund $60 \cdot 466$ km*, das sind rund 28 000 km*) zurück.

*) *Anmerkung:* Eigentlich müßte an diesen Stellen mit Hilfe einer Fehlerrechnung bewiesen werden, daß die Rundung richtig ist. Dieser an sich erforderliche Nachweis wird aber vom Schüler nicht verlangt.

b) Da die Raumschiffgruppe in jeder Minute 466 km = 466 000 m zurücklegte, legte sie in jeder Sekunde den 60. Teil davon, also wegen 466 000 : 60 = 7 767 rund 7 800 m*) zurück.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100623:

(1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

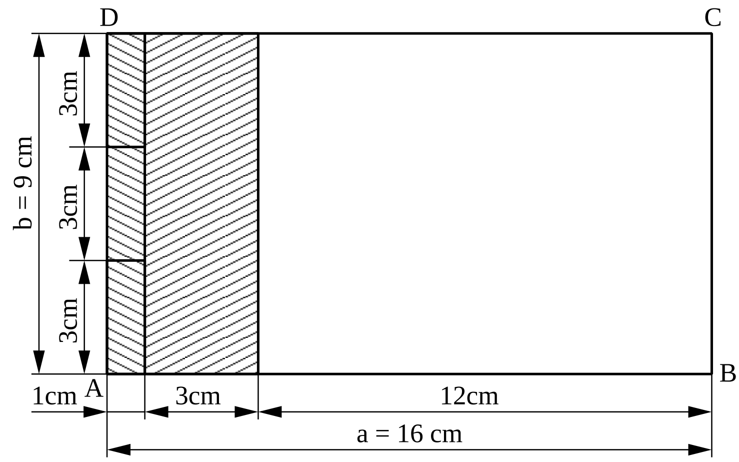
(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kam als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

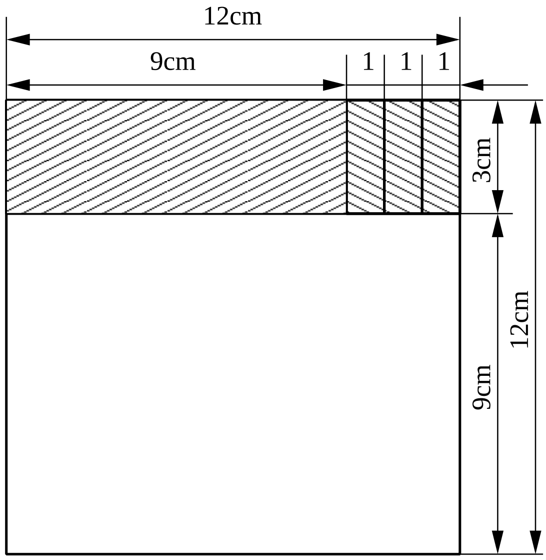
(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme. Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9. Lautet daher die Einerziffer $\left.\begin{matrix}0\\4\\8\end{matrix}\right\}$ so kann die Hunderterziffer nur $\left\{\begin{matrix}0 \text{ oder } 9\\5\\1\end{matrix}\right\}$ sein.

Also können nur die Zahlen 52 020; 52 920; 52 524; 52 128 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, daß sie dies auch sämtlich tun.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 100624:





(Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\,\mathrm{cm} \cdot 16\,\mathrm{cm} = 144\,\mathrm{cm}^2$. Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muß, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muß seine Seite 12 cm lang sein.)

Anmerkung: Da laut Aufgabe nur die Angabe einer Möglichkeit gefordert war, sind derartige Überlegungen für eine vollständige Lösung nicht erforderlich. Eine mögliche Zerlegung ist die in der Abb. dargestellte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110611:

Wegen $1\,200 - 800 = 400$ legte das erste Auto 400 km mehr zurück als das zweite. Für diese 400 km verbrauchte es laut Aufgabe 36 Liter Kraftstoff.

Beide Autos legten zusammen $1\,200\text{ km} + 800\text{ km} = 2\,000\text{ km}$ zurück. Das sind 5 mal soviel wie 400 km. Folglich verbrauchten sie insgesamt wegen $5 \cdot 36 = 180$ für diese Strecken 180 Liter Kraftstoff.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

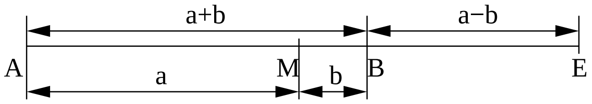
Lösung 110612:

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Wir zeichnen die Strecke AB.

(2) Wir verlängern die Strecke AB über B hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) CD.

(3) Ist E der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke AE. Der Mittelpunkt von AE sei M genannt. Dann ist AM eine Strecke der Länge a und MB eine Strecke der Länge b.



Begründung: Nach Konstruktion hat AE die Länge

$$a + b + a - b = 2a.$$

Daher hat AM die Länge a sowie MB die Länge

$$a + b - a = b.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110613:

a) Genau 3 kleine Würfel haben keine rot angestrichene Fläche.

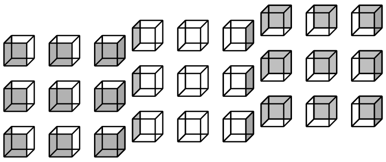
Genau 12 kleine Würfel haben genau eine rot angestrichene Fläche.

Genau 12 kleine Würfel haben genau zwei rot angestrichene Flächen. Keiner der Würfel hat drei rot angestrichene Flächen.

b) Die Anzahlen lauten in diesem Falle in der oben angegebenen Reihenfolge: 4; 12; 9; 2.

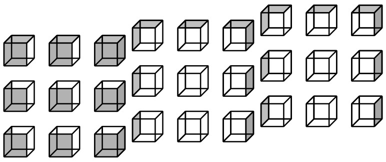
Die Zeichnungen werden vom Schüler nicht verlangt.

3a)



(Die 4 Mantelflächen seien angestrichen, die Grund- und die Deckfläche nicht; bei jedem kleinen Würfel ist die Zahl der angestrichenen Flächen angegeben.)

3b)



(3 Mantelflächen und die Deckfläche seien angestrichen, die hinten liegende Mantelfläche und die Grundfläche nicht.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110614:

Da die Straße die Länge 999 km hat, ist die Summe der Kilometerangaben auf jedem der Steine 999. Daraus folgt:

(1) Auf der einen Seite jedes der Kilometersteine steht eine gerade und auf der anderen Seite eine ungerade Zahl. Beide Zahlen sind also voneinander verschieden.

(2) Die Summe der Einerziffern auf jedem Kilometerstein beträgt 9, desgleichen die Summe der beiden Zehnerziffern und ebenso die Summe der beiden Hunderterziffern.

(3) Zu jedem Kilometerstein S der Aufgabe gibt es genau einen anderen S', der die gleiche Bezifferung trägt (S' hat von B dieselbe Entfernung wie S von A).

Die gesuchte Zahl x ist daher gleich der doppelten Anzahl y derjenigen Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei Ziffern verwendet wurden und die näher an A stehen als an B. Bei jedem solchen Stein S ist die Hunderterziffer der Kilometerangabe von S nach B eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9 (wegen (2)).

Daher lautet die Hunderterziffer der anderen Kilometerangabe auf S jeweils 4, 3, 2, 1 bzw. 0.

In den ersten vier Fällen sind damit die beiden vorkommenden Ziffern bestimmt; aber auch im Fall 5 kann außer 9 (und evtl. 0) keine andere Ziffer z auftreten, da sonst die drei verschiedenen Ziffern 9, z und $(9 - z)$ vorkämen.

Nun kann man mit den Ziffern a und b, $b \neq a$, genau 4 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, deren Hunderterziffer a ist, nämlich aaa, aab, aba, abb.

Infolgedessen ist, da hier a die fünf Werte 5, 6, 7, 8, 9 und nur diese annehmen kann: $y = 5 \cdot 4$ und die gesuchte Anzahl $x = 2y = 40$.

Es gibt also genau 40 Kilometersteine, bei deren Beschriftung höchstens zwei voneinander verschiedene Ziffern verwendet wurden.

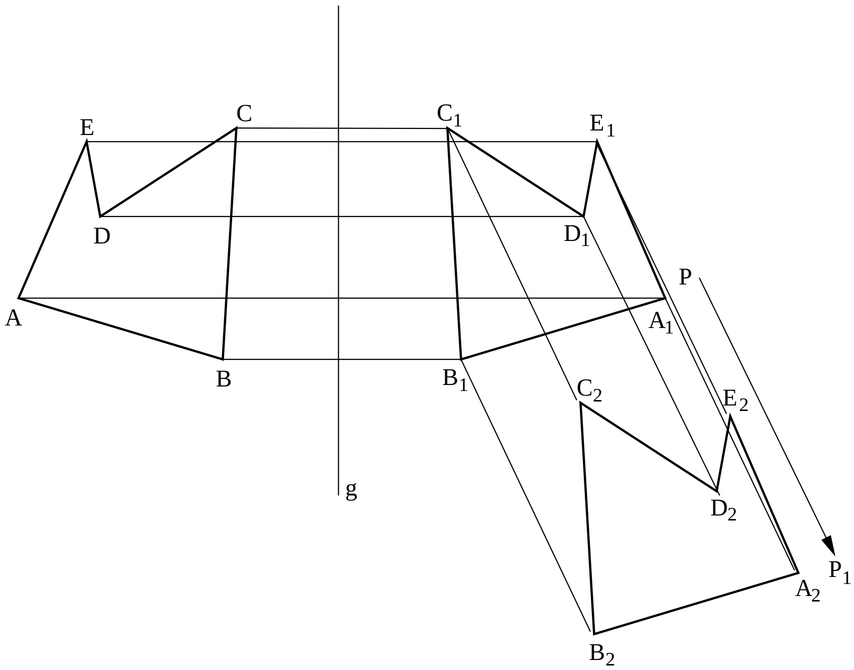
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

OJM

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110621:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110622:

(4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.

(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.

(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110623:

Soll der größere Summand das 49fache des kleineren Summanden betragen, so muß die Summe das 50fache des kleineren Summanden sein. Diesen erhält man daher, wenn man die Summe durch 50 dividiert; er lautet somit $25 : 50 = \frac{1}{2}$, und hiernach muß der größere Summand $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ sein.

In der Tat beträgt die Summe von diesen beiden Summanden (von denen der größere 49 mal so groß ist wie der kleinere) $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = 25$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 110624:

Laut Aufgabe besitzt Rainer Spargeld. Dessen Betrag sei x Mark. Dann gilt

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 7.$$

Hieraus folgt nach Multiplikation mit 30 weiter $10x + 6x = 15x + 210$ und daraus $x = 210$. Also hat Rainer insgesamt 210 Mark gespart.

Anderer Lösungsweg: Wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} = \frac{16}{30}$ und $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$ sind $\frac{16}{30}$ von Rainers Spargeld genau 7 Mark mehr als $\frac{15}{30}$ dieses Geldes. Also stellen 7 Mark genau $\frac{1}{30}$ seines Spargeldes dar. Er hat mithin insgesamt 30 mal so viel gespart. Das sind genau 210 Mark.

Hinweis: Da der Aufgabentext bereits die Existenz einer Geldsumme mit den angegebenen Eigenschaften vorgibt, ist zur vollständigen Lösung keine "Probe" erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120611:

Die Anzahl der Schüler, die beide Zeitschriften lesen, sei x.

Dann lesen genau $(20-x)$ Schüler "Frösi" aber nicht "alpha", ferner genau $(12-x)$ Schüler "alpha", aber nicht "Frösi". Daher gilt

$$x+(20-x)+(12-x)+6=30,$$

woraus $38-x=30$, also $x=8$ folgt.

Hinweis: Da aus der Aufgabenstellung die Existenz einer Anzahl x mit allen geforderten Eigenschaften entnommen werden kann, ist eine Probe nicht zu einer vollständigen Lösung erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 120612:

Jedes der sechs Gehäuse muß mit einem der vier Zifferblätter ausgestattet werden. Das ergibt genau $6\cdot 4=24$ verschiedene Möglichkeiten einer Ausstattung mit Gehäuse und Zifferblatt. Jede dieser Möglichkeiten muß mit je einer der drei verschiedenen Zeigerausführungen verbunden werden. Das gibt insgesamt genau $24\cdot 3=72$ verschiedene Ausführungsmöglichkeiten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 120613:

a) Der Flächeninhalt der Standfläche für die Maschinen beträgt $166\,\text{m}^2$, derjenige der Fläche für die Lagerung der Werkstücke $86\,\text{m}^2$, der Flächeninhalt der gesamten Bodenfläche wegen $11\cdot 36=396$ insgesamt $396\,\text{m}^2$. Mithin verbleiben wegen $396-166-86=144$ für die Transportwege $144\,\text{m}^2$.

b) Die Breite der Transportwege betrage x m. Dann gilt $48\cdot x=144$, woraus man $x=144:48$, also $x=3$ erhält. Dann beträgt die gesuchte Breite 3 m.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 120614:

Angenommen, die Längen a, b, c haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 168\text{ m}, \quad \text{ferner} \\ b &= 3a \quad \text{sowie} \\ c &= 4a. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a + 3a + 4a &= 168\,\text{m}, \quad \text{also} \\ 8a &= 168\,\text{m}, \quad \text{woraus man} \\ a &= 21\,\text{m}, \quad \text{also} \\ b &= 63\,\text{m} \;\; \text{und} \;\; c = 84\,\text{m} \;\; \text{erhält.} \end{aligned}$$

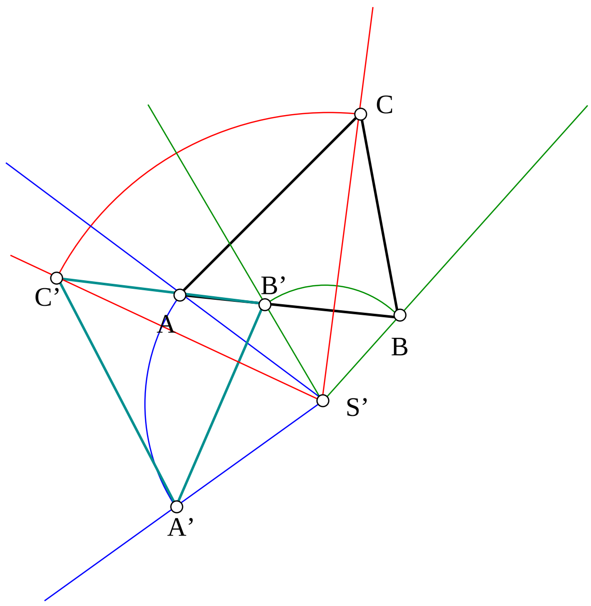
Deshalb können nur diese Längen die gestellten Bedingungen erfüllen. Wegen $63\text{ m} = 3\cdot 21\text{ m}$, $84\text{ m} = 4\cdot 21\text{ m}$ und $21\text{ m} + 63\text{ m} + 84\text{ m} = 168\text{ m}$ haben sie die geforderten Eigenschaften tatsächlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 120621:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 120622:

Da jede Prämienstufe mindestens einmal vertreten war, gibt es mindestens 1 Werktätigen, der 150 M, einen, der 250 M, einen, der 350 M, einen, der 400 M und einen, der 500 M erhalten hatte. An diese fünf Werktätigen wurden daher insgesamt 1 650 M ausgezahlt.

Für die restlichen 6 Werktätigen stehen mithin noch genau 1 000 M zur Verfügung. Hätte jeder dieser Werktätigen genau 150 M erhalten, dann wären das zusammen 900 M. Also muß mindestens einer der 6 Werktätigen mehr als 150 M Prämie bekommen haben.

Laut Aufgabe hat er dann aber mindestens 250 M Prämie bekommen. Für die restlichen 5 Werktätigen verbleiben nun höchstens 750 M, es konnte also kein weiterer der fünf Werktätigen mehr als 150 M Prämie erhalten haben. Folglich beträgt die gesuchte Anzahl 6.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 120623:

Die von den Pionieren erzielten Sammelergebnisse seien mit r, w, m, b, j (in Mark) bezeichnet. Dann gilt laut Aufgabe:

(1) $w > b > j$

(2) $j > r$; $\quad r = 13$

(3) $b = r + 4$

(4) $w = m + 2 \quad m = j + 1$

Aus (2) und (3) folgt $b = 17$. Aus (1) und (2) folgt $w > b > j > r$, aus (4) $w > m > j$ und daraus sowie aus (5) $m = b$, also $m = 17$.

Daher sammelten: Werner 19 M, Beate und Margot je 17 M, Jan 16 M und Rita 13 M.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

Lösung 120624:

Die Anzahl der in der DDR beheimateten Schiffe beträgt laut Aufgabe $\frac{1}{3}$ der Gesamtzahl, also stammten 7 Schiffe aus der DDR. Die restlichen 14 Schiffe stammten aus den anderen vier Ländern.

Nun hat Manfred laut Aufgabe mindestens 1 indisches Schiff sowie infolgedessen mindestens 3 finnische, 4 bulgarische und 6 sowjetische Schiffe gesehen. Da das zusammen bereits 14 Schiffe sind, sind damit die gesuchten Anzahlen gefunden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (13)

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130611:

Die Längen der vier Teilstücke sind ausgehend von der Länge des ersten Teilstücks: 1. x, 2. $(x + 40\text{ cm})$, 3. $(x + 80\text{ cm})$ und 4. $(x + 120\text{ cm})$. Die Summe der vier Stücke soll $7\text{ m} = 700\text{ cm}$ betragen. Also

$$\begin{aligned} x + (x + 40) + (x + 80) + (x + 120) &= 700 \\ 4x + 240 &= 700 \\ 4x &= 460 \\ x &= 115 \end{aligned}$$

Das erste Teilstück ist 115 cm lang. Das zweite damit 155 cm, das dritte 195 cm und das vierte 235 cm.

Die Summe der vier Teilstücke ist $115 + 155 + 195 + 235 = 700$.

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 130612:

Der Flächeninhalt des Bildes beträgt (wegen $12 \cdot 18 = 216$) 216 cm^2. Der Flächeninhalt von Rahmen plus Bild beträgt 432 cm^2 wegen

$$(12 + 2 \cdot 3) \cdot (18 + 2 \cdot 3) = 18 \cdot 24 = 432.$$

Damit ist die Rahmenfläche die Differenz dieser beiden Flächeninhalte: $432\text{ cm}^2 - 216\text{ cm}^2 = 216\text{ cm}^2$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 130613:

2	5	8	11	14	3
4	8	12	16	20	4
6	11	16	21	26	5
8	14	20	26	32	6
10	17	24	31	38	7
2	3	4	5	6	Differenz

Die dritte Zeile und 2. Spalte ergeben sich automatisch anhand der vorgegebenen Zahlen. Damit ergibt sich die 1. Zeile. Wenn man die doppelte Differenz betrachtet, kann man die 1. Spalte ausfüllen. Alle weiteren Zeilen ergeben sich daraufhin, was gleichbedeutend mit allen Spalten ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 130614:

Es gibt die folgende Anzahl von Zahlen zwischen 0 und 1000, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten:

zwischen 0 und 49 gibt es 5 solche Zahlen,
zwischen 50 und 59 gibt es 10 solche Zahlen,
zwischen 60 und 100 gibt es 4 solche Zahlen.

Zwischen 0 und 99 gibt es also 19 solche Zahlen. Analog können die Bereiche 100 bis 199, 200 bis 299 u.s.w. betrachtet werden (außer dem Bereich 500 bis 599), es ergeben sich insgesamt $9 \cdot 19 = 171$ solche Zahlen. Dazu kommen noch die 100 Zahlen von 500 bis 599 hinzu.

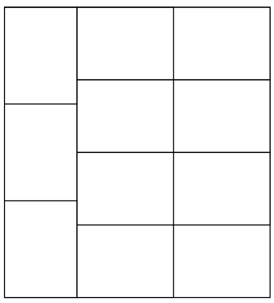
Man kann also zusammenfassend feststellen, daß es 271 Zahlen zwischen 0 und 1 000 gibt, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten. Demgegenüber stehen $1001 - 271 = 730$ Zahlen ohne Ziffer 5. Es gibt also weniger solche Zahlen mit 5 als Zahlen in diesem Bereich ohne Ziffer 5.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (16)

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 130621:



Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von $528\,\text{cm}^2$. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von $48\,\text{cm}^2$.

Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Daß dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abbildung. (Der Schüler braucht in seiner Zeichnung keine Bemaßung anzugeben.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 130622:

Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.

Wegen $5 \cdot (24^2 + 12^2 + 6^2 + 3^2) - (12^2 + 6^2 + 3^2) = 3\,636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel $3\,636\,\text{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 130623:

Es sei x die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist x durch 9 teilbar, also wegen $10 < x < 40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist x auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27.

Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Kote "3". Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

Klassenstärke	Anzahl der Schüler mit der Note			
	1	2	4	3
18	3	6	2	7
36	6	12	4	14

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 130624:
Die Summe der für die Zeichen * einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18. Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.

Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.

Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:

$$5\,000\,805,\ 5\,010\,705,\ 5\,020\,605,\ 5\,030\,505,\ 5\,040\,405,\ 5\,050\,305,\ 5\,060\,205,\ 5\,070\,105,\ 5\,080\,005,$$
$$5\,080\,905,\ 5\,090\,805.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140611:

Das Produkt aus Zweierpotenzen ist nach den Potenzgesetzen die Zweierpotenz der Summe der Exponenten. Die jeweilige Summe für Zeilen, Spalten und Diagonalen ist nach der ersten Zeile 15. Die Exponenten werden im folgenden bezeichnet mit a^* usw.:

Man berechnet jeweils eindeutig der Reihe nach

$$\begin{array}{rclcll}
a^* & = & 15-7-4 & = & 4 & \Rightarrow\ a=2^4 \\
b^* & = & 15-6-a^* & = & 5 & \Rightarrow\ b=2^5 \\
e^* & = & 15-4-b^* & = & 6 & \Rightarrow\ e=2^6 \\
d^* & = & 15-6-e^* & = & 3 & \Rightarrow\ d=2^3 \\
c^* & = & 15-2-b^* & = & 8 & \Rightarrow\ c=2^8
\end{array}$$

Probe: Tabelle der Exponenten mit Summe in Zeilen, Spalten und Diagonalen:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 6 & 2 & 7 & 15 \\
 & 6 & 5 & 4 & 15 \\
 & 3 & 8 & 4 & 15 \\
\hline
15 & 15 & 15 & 15 & 15
\end{array}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner

Lösung 140612:

Wenn bei 25 Zirkelteilnehmern genau 2 gefehlt haben, waren genau 23 Teilnehmer anwesend. Bei dieser Veranstaltung waren laut Bernd x Mädchen und $(x+6)$ Jungen da.

$$\begin{aligned}
x+(x+6) &= 23 \\
2x+6 &= 23 \\
2x &= 17 \\
x &= 8.5
\end{aligned}$$

ist nicht ganzzahlig. Damit ist klar, daß Monika recht hat. Die von Bernd geschilderte Konstellation ist nicht möglich.

Hinweis: Es reicht zur Begründung auch aus anzugeben, daß bei einer geraden Anzahl Mädchen die Anzahl der Jungen ebenfalls geradzahlig ist und die Summe aus Mädchen und Jungen dann wieder geradzahlig wäre. Im ungeraden Fall der Mädchen wäre auch eine ungerade Anzahl Jungen dabei, die Summe zweier ungerader Zahlen ist wieder gerade. Da aber 23 eine ungerade Zahl ist, kann Bernds Aussage nicht stimmen.

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 140613:

Die zurückgelegten Strecken s (in km) zum Zeitpunkt t (in Stunden des Tages) lassen sich für die Radfahrer durch die Funktionen

$$s_1(t) = 12(t-6) = 12t - 72 \text{ für den ersten und}$$
$$s_2(t) = 15(t-7) = 15t - 105 \text{ für den zweiten Radfahrer}$$

beschreiben. (Natürlich sind die Definitionsbereiche auf $t \geq 6$ bzw. $t \geq 7$ eingeschränkt.)

a) Beim Treffpunkt ist $s_1(t) = s_2(t)$, also $12t - 72 = 15t - 105$, woraus $t = 11$ folgt.
Der zweite Radfahrer holt den ersten um 11 Uhr ein.

b) $s_1(11) = 12 \cdot 11 - 72 = s_2(11) = 60$

Die Entfernung zwischen A und B beträgt 60 km.

Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner

Lösung 140614:

Multipliziert man 75 mit ganzen Zahlen, so entstehen als letzte beide Ziffern immer 00, 25, 50 oder 75 (also modulo 100 bzw. nach Division durch 100):

$$\begin{aligned} 0 \cdot 75 &= 0 \\ 1 \cdot 75 &= 75 \\ 2 \cdot 75 &= 150 \\ 3 \cdot 75 &= 225 \\ 4 \cdot 75 &= 300 \\ &\dots \end{aligned}$$

Da die letzte Ziffer 5 sein muß, ist in jedem Fall die vorletzte Ziffer 2 oder 7.

Die Primfaktorendarstellung von 75 sieht wie folgt aus: $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$. Damit die fünfstellige Zahl durch 3 teilbar wird, muß die Quersumme durch 3 teilbar sein. Diese lautet, wenn man a für die 2. und b für die 4. Stelle einsetzt:

Quersumme $q = 3 + a + 6 + b + 5 = 14 + a + b$ mit $b = 2$ oder $b = 7$. Damit ergibt sich $q = a + 16$ bzw. $q = a + 21$. Dadurch muß $a = 2, 5, 8$ für den Fall $b = 2$ sein bzw. $a = 0, 3, 6, 9$ für $b = 7$.

Die fünfstellige Zahl lautet mithin:

32625, 35625, 38625, 30675, 33675, 36675, 39675

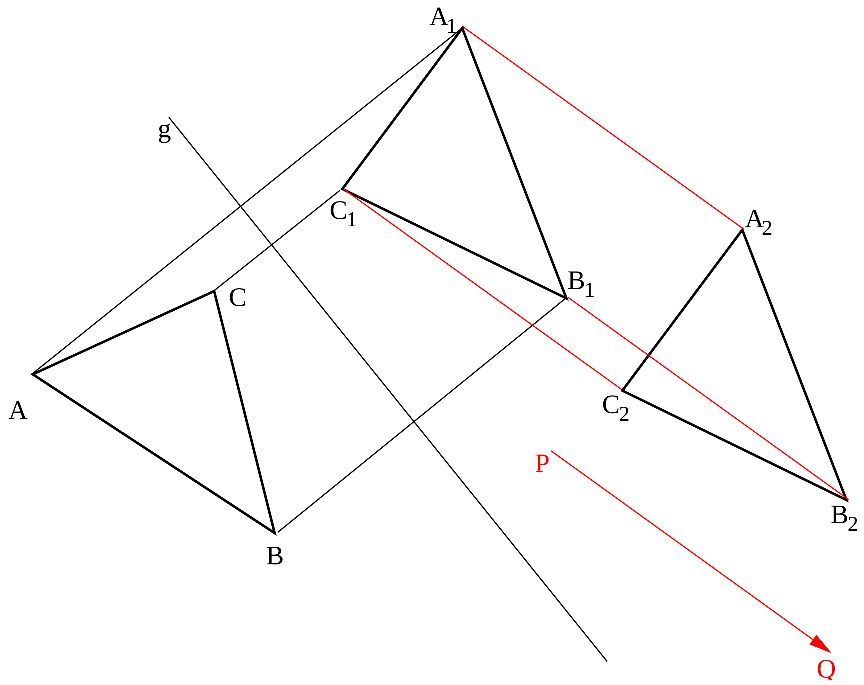
Die Probe bestätigt jede dieser Lösungen.

Aufgeschrieben und gelöst von Arndt Brünner

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 140621:



Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Spiegelung an g und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 140622:
Wenn es eine Zahl z der genannten Art gibt, so gilt für sie und die Zahl z':

(1) $z' = 198 + z$ sowie

(2) $z + z' = 13\,776$.

Aus (1) und (2) folgt:

$$z + 198 + z = 13\,776, \quad \text{woraus man}$$
$$2z = 13\,776 - 198 = 13\,578, \quad \text{also}$$
$$z = 6\,789 \;\text{ erhält.}$$

Also kann nur diese Zahl die genannten Eigenschaften haben. In der Tat treffen nun Klaus' Aussagen für diese Zahl und $z' = 6\,789 + 198 = 6\,987$ zu, da z' aus z dadurch gewonnen werden kann, daß in z die Ziffern 7 und 9 miteinander vertauscht werden.

Daher hat genau die Zahl $z = 6\,789$ die von Klaus genannten Eigenschaften.

Oder: Die Summe aus z und einer um 198 größeren Zahl als z beträgt laut Aufgabe 13 776. Daher ist das Doppelte der Zahl z gleich der Differenz aus 13 776 und 198, also gleich 13 578. Mithin ist z halb so groß wie 13 578 und lautet daher 6789.

Vertauscht man in dieser Zahl die Ziffern 7 und 9 miteinander, so erhält man mit 6 987 tatsächlich eine Zahl, die um 198 größer ist als z.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 140623:

Angenommen, in Aussage (1) wäre Brigittes Plazierung richtig angegeben, dann wären die Plätze von Anita in (2) und Dana in (3) falsch angegeben, und demnach müßte Christa den dritten und zugleich den vierten Platz belegt haben, was nicht möglich ist. Folglich ist in (1) die Plazierung von Anita richtig und die von Brigitte falsch angegeben, d.h., Anita belegte den ersten Platz und Brigitte nicht den zweiten Platz.

Danach ist in (2) der Platz Anitas falsch und der Christas richtig angegeben. Daraus folgt, daß in (3) der Platz Christas falsch und der Danas richtig angegeben wurde. Mithin belegten Anita den ersten, Dana den zweiten, Christa den dritten und Brigitte den vierten Platz.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 140624:

Der erste Radfahrer war um 8.00 Uhr genau zwei Stunden gefahren und hatte dabei eine Strecke von 28 km zurückgelegt.

Von diesem Zeitpunkt an legte der zweite Radfahrer in jeder Stunde genau 7 km mehr zurück als der erste. Da sie sich genau am Mittelpunkt der Strecke von A nach B trafen, geschah das wegen $28 : 7 = 4$ genau 4 Stunden nach Abfahrt des zweiten Radfahrers, also um 12.00 Uhr.

Bis zu diesem Zeitpunkt hatte wegen $6 \cdot 14 = 84$ bzw. $4 \cdot 21 = 84$ jeder von beiden genau 84 km zurückgelegt.

Die Länge der Strecke von A nach B beträgt wegen $2 \cdot 84 = 168$ mithin 168 km.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 150611:

Wegen $132\,000 + 24\,000 = 156\,000$ betrug die gelieferte Gesamtmenge $156\,000$ t. Wegen $132\,000 : 600 = 220$, $24\,000 : 600 = 40$ und $220 + 40 = 260$ oder: wegen $156\,000 : 600 = 260$ waren das insgesamt 260 Kahnladungen. Da es sich vom 6. bis 18. Dezember 1974 um insgesamt 13 Liefertage handelte, trafen wegen $260 : 13 = 20$ täglich durchschnittlich 20 dieser Kahnladungen aus der Volksrepublik Polen in Berlin ein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150612:

Die fünf im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben lauten:

(1) $a \cdot a = b$,

(2) $c \cdot a = d$,

(3) $e \cdot a = a$,

(4) $a - c = e$,

(5) $b - d = a$.

Wenn fünf Ziffern a, b, c, d, e diese Aufgaben richtig lösen und sämtlich untereinander verschieden sind, so folgt $a \neq 0$; denn für $a = 0$ wäre wegen (1) auch $b = 0$.

Aus (3) folgt hiernach $e = 1$.

Ferner folgt $c \neq 0$; denn für $c = 0$ wäre wegen (2) auch $d = 0$.

Hiernach und wegen $c \neq e$ ist $c \geq 2$, nach (4) also $a = c + e = 3$. Andererseits gilt nach (1) und weil b einstellig ist, $a \cdot a \leq 9$, also $a \leq 3$. Folglich muß $a = 3$ sein, nach (4) somit $c = a - e = 2$. Aus (1), (2) erhält man nun $b = 9$, $d = 6$. Daher kann nur die Eintragung den Bedingungen der Aufgabenstellung entsprechen.

Sie genügt diesen Bedingungen; denn die für a, b, c, d, e eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 6, 1 sind untereinander verschieden, und alle im Kryptogramm enthaltenen Aufgaben sind mit diesen Ziffern richtig gelöst.

Also hat genau die angegebene Eintragung die geforderten Eigenschaften.

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{3} & \cdot & \boxed{3} & = & \boxed{9} \\
- & & & & - \\
\boxed{2} & \cdot & \boxed{3} & = & \boxed{6} \\
\hline
\boxed{1} & \cdot & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150613:

Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, so gilt für sie:

Bezeichnet man den kleineren der beiden Summanden mit x, dann lautet der größere $49x$, und es gilt $x + 49x = 25$, also $50x = 25$, woraus man $x = \frac{1}{2}$ erhält.

Also kann nur eine Zerlegung die geforderten Eigenschaften haben, in der der kleinere Summand $\frac{1}{2}$ und der größere $49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{2}$ lautet.

Dies ist auch in der Tat eine Zerlegung der gesuchten Art; denn für diese beiden Summanden ist $\frac{1}{2} + \frac{49}{2} = \frac{50}{2} = 25$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150614:

Am letzten Tag waren 27 kg gesammelt worden, am vorletzten Tag wegen $27 - 6 = 21$, also 21 kg.

Wegen $27 + 21 = 48$ betrug das Sammelergebnis der letzten beiden Tage daher 48 kg. Da dies ein Viertel der insgesamt erreichten Menge war, ist diese das Vierfache von 48 kg, wegen $4 \cdot 48 = 192$ also 192 kg Altpapier.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

15. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 150621:

Der erste Hubschrauber beförderte $\frac{1}{3}$ von 15 000 kp, das sind 5 000 kp. Der zweite beförderte $\frac{7}{8}$ von 15 000 kp, wegen $\frac{7}{8} \cdot 15\,000 = 13\,125$ sind das 13 125 kp; der dritte beförderte $\frac{3}{5}$ von 15 000 kp, wegen $\frac{3}{5} \cdot 15\,000 = 9\,000$ also 9 000 kp.

Das beförderte Sperrgut hatte somit wegen $5\,000+13\,125+9\,000 = 27\,125$ ein Gesamtgewicht von 27 125 kp.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

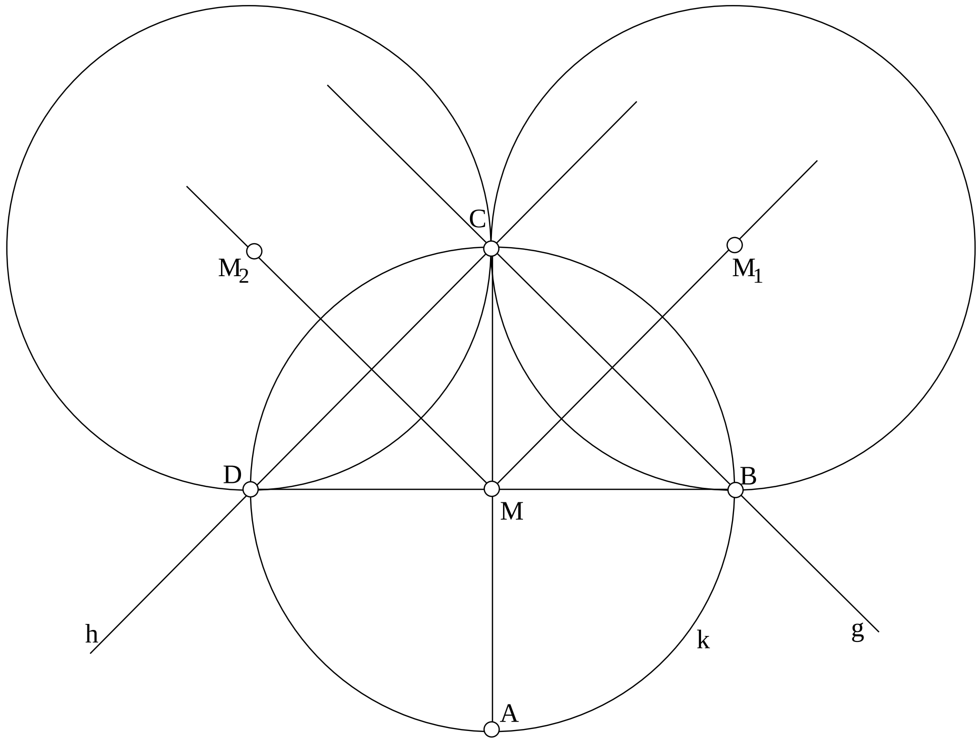
Lösung 150622:

Die Anzahl dar Dreibett-Kabinen muß mindestens 1 und kann wegen $3 \cdot 14 = 42 > 41$ höchstens 13 betragen. Außerdem muß ihre Anzahl ungerade sein, da sonst (bei gerader Anzahl von Drei-Bett-Kabinen) eine gerade Zahl von Plätzen dadurch belegt waren und als Differenz zur ungeraden Zahl 41 mithin eine ungerade Zahl von Betten auftreten würde, die sich nicht ausschließlich auf Zweibett-Kabinen verteilen läßt. Für jede der ungeraden Zahlen von Dreibett-Kabinen von 1 bis 13 gibt es nun jeweils genau eine (zugehörige) Anzahl von Zweibett-Kabinen, wie nachstehende Tabelle ausweist:

Anzahl der Dreibett-K.	Anzahl der damit vorh. Betten	Anzahl der darüber hinaus vorh. Betten	Anzahl der Zweibett-K.	Gesamt-Plätze
1	3	38	19	41
3	9	32	16	41
5	15	26	13	41
7	21	20	10	41
9	27	14	7	41
11	33	8	4	41
13	39	2	1	41

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150623:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 150624:

a) Die schraffierte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, daß aus einem Rechteck R zwei Rechtecke S und T herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10 + 15 + 10 + 15 + 10 = 60$ das Rechteck R die Seitenlängen 60 mm und 70 mm hat und jedes der Rechtecke S, T die Seitenlängen 15 mm und 50 mm. Daher ergeben sich für R, S, T wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte $4\,200\,\text{mm}^2$ bzw. $750\,\text{mm}^2$ bzw. $750\,\text{mm}^2$.

   Somit hat wegen $4\,200 - 750 - 750 = 2\,700$ die schraffierte Fläche den Flächeninhalt $A = 2\,700\,\text{mm}^2$.

b) Die Seitenlängen von R sind $(3e + 2f)$ und h, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke S, T sind f und g. Daher hat R den Flächeninhalt $(3e+2f)h$, und jedes der Rechtecke S, T hat den Flächeninhalt $f \cdot g$. Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

Hinweis:

1. Eine weitere Umformung, etwa $A = 3eh+2fh-2fg = 3eh+2f(h-g)$, ist nicht zu einer vollständigen Lösung erforderlich.
2. Man kann auch erst Aufgabe b) lösen und dann Aufgabe a) durch Einsetzen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160611:

Wenn es eine derartige Eintragung gibt, so folgt aus der 3. Zeile $G = 1$. Ferner folgt aus der 1. Zeile, daß B das Quadrat von $A (\neq B)$ ist, also $B = 4$ oder $B = 9$ gilt und daher $D = 3$ oder $D = 8$ sein muß.

Andererseits ist D (nach der 2. Zeile) das Produkt zweier von D verschiedener Ziffern C, E, also keine Primzahl.

Daher verbleibt nur die Möglichkeit $D = 8$, $B = 9$, $A = 3$.

Da $8 = 2 \cdot 4$ bis auf die Reihenfolge die einzige Zerlegung von 8 in zwei von 8 verschiedene Faktoren ist, folgt entweder $C = 2$, $E = 4$ oder $C = 4$, $E = 2$.

Im ersten Fall ergibt sich $F = 5$, im zweiten Fall $F = 7$. Also können nur die Eintragungen

$$\begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 222 & \cdot & 4 & = & 888 \\ \hline 555 & : & 5 & = & 111 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccccc} 333 & \cdot & 3 & = & 999 \\ + & & & & - \\ 444 & \cdot & 2 & = & 888 \\ \hline 777 & : & 7 & = & 111 \end{array}$$

alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingungen auch; denn die für A, B, C, D, E, F, G eingesetzten Ziffern 3, 9, 2, 8, 4, 5, 1, bzw. 3, 9, 4, 8, 2, 7, 1 sind jeweils sämtlich voneinander verschieden, und die angegebenen Rechenaufgaben sind richtig gerechnet.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160612:

Die Zeit von 7.00 Uhr bis 11.00 Uhr beträgt 4 Stunden, das sind 240 Minuten. Die Rastzeit beträgt 20 Minuten, die Fahrzeit also 220 Minuten.

Wegen $220 \cdot 320 = 70\,400$ ist die von Knut insgesamt zurückgelegte Strecke mithin $70\,400\,\text{m} = 70,4\,\text{km}$ lang.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160613:

I) Wenn x eine solche Zahl ist, dann gilt für sie

$$\frac{17 - x}{19 + x} = \frac{7}{11}.$$

Da der Bruch $\frac{7}{11}$ durch keine natürliche Zahl gekürzt werden kann, muß der Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ durch Erweitern aus dem Bruch $\frac{7}{11}$ hervorgehen. Also muß die Zahl $19 + x$ ein Vielfaches der Zahl 11 sein.

Das kleinste Vielfache von 11, das größer als 19 (oder gleich 19) ist, ist 22. Also muß x mindestens 3 betragen. Wäre $x > 3$, so wäre in dem Bruch $\frac{17-x}{19+x}$ der Zähler kleiner als 14, und der Nenner größer als 22, der Bruch folglich kleiner als $\frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.

Somit kann nur die Zahl $x = 3$ die verlangte Eigenschaft haben.

II) Sie hat diese Eigenschaft; denn subtrahiert man sie vom Zähler 17 und addiert sie zum Nenner 19, so entsteht der Bruch $\frac{17-x}{19+x} = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$.

Also erfüllt genau die Zahl $z = 3$ die Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160614:

Wegen $91 - 26 = 65$ zahlten die Pioniere dieser Gruppe insgesamt genau 65 Markstücke in die Reisekasse. Also ist 65 ein Vielfaches der Anzahl der Pioniere der Gruppe. Alle natürlichen Zahlen, die 65 als Vielfaches haben, kommen in den Zerlegungen $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$ vor. Von diesen Zahlen ist nur 13 zugleich größer als 10 und kleiner als 50.

Entsprechend der Aufgabe müssen daher 13 Pioniere an der Fahrt teilgenommen haben, und jeder von ihnen hat genau 5 M in die Reisekasse gezahlt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 160621:

Wenn bei einer Einsetzung alle Angaben zutreffen, so folgt aus den Angaben über die Zehntausenderziffer, daß $A = 5$ ist. Aus den Angaben über die Einerziffer folgt daher $I+R = 10$. Von den möglichen Darstellungen der 10 als Summe von zwei verschiedenen einstelligen Zahlen

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

scheiden diejenigen aus, in denen die Ziffern schon für andere Buchstaben als I und R eingesetzt wurden, also $E = 1$, $H = 9$, $P = 7$, $L = 6$. Daher verbleibt nur die Darstellung $10 = 2 + 8$.

Wegen $I < R$ ist also $I = 2$, $R = 8$. Da bei der Addition der Zehnerziffern eine Zehnerübertragung von genau 1 auftritt, ergibt sich aus den Angaben über die Hunderterziffern $T = 4$.

Also kann nur die Einsetzung $ALPHA$ (56795) $HEITER$ (912418) alle Forderungen erfüllen. Sie erfüllt diese Forderungen; denn die für verschiedene Buchstaben eingesetzten Ziffern sind sämtlich verschieden, es gilt $EHPL \cdot 1976$ und $I < R$, und die Addition

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 6 & 7 & 9 & 5 \\ + & & & 9 & 1 & 2 \\ + & & & 4 & 1 & 8 \\ \hline & 5 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

ergibt die Summe 58 125.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160622:

Wegen $68 + 76 + 64 + 52 = 260$ besitzen die vier Räume eine Gesamtbodenfläche von $260\,\mathrm{m}^2$. Wegen $260 : 65 = 4$ standen für jeden Pionier laut Aufgabe $4\,\mathrm{m}^2$ Bodenfläche zur Verfügung. Daher ergab sich wegen $68 : 4 = 17$, $76 : 4 = 19$, $64 : 4 = 16$ sowie $52 : 4 = 13$ folgende Belegung:

Im ersten Raum:	17 Thälmann-Pioniere,
im zweiten Raum:	19 Thälmann-Pioniare,
im dritten Raum:	16 Thälmann-Pioniere,
im vierten Raum:	13 Thälmann-Pioniere,
zusammen also:	65 Thälmann-Pioniere.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160623:

Wegen $80 \cdot 60 = 4\,800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks $4\,800\,\mathrm{mm}^2 = 48\,\mathrm{cm}^2$. Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen $48 - 44 = 4$ somit $4\,\mathrm{cm}^2$. Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.

Die Seitenlänge a des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20$ mm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 160624:

Laut Aufgabe enthalten 35 kg des in der Aufgabe genannten Gemischs wegen $\frac{1}{2} \cdot 35 = 17,5$ genau $17,5$ kg Haferschrot,

wegen $\frac{1}{10} \cdot 35 = 3,5$ genau $3,5$ kg Weizenkleie,

wegen $\frac{1}{4} \cdot 35 = 8,75$ genau $8,75$ kg Gerstenschrot,

wegen $\frac{1}{100} \cdot 35 = 0,35$ genau $0,35$ kg Mineralstoffe.

Das sind wegen $17,5 + 3,5 + 8,75 + 0,35 = 30,1$ insgesamt $30,1$ kg. Wegen $35 - 30,1 = 4,9$ verbleiben mithin genau $4,9$ kg Wasser als Wasseranteil dieses Kraftfuttergemischs.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 170611:

a) Von 1950 bis 1960 wurde das Ergebnis um $334\,000\,\text{t} - 231\,000\,\text{t} = 103\,000\,\text{t}$ gesteigert. Das entspricht einer Gesamtsteigerung um

$$\frac{103\,000\,\text{t}}{231\,000\,\text{t}} \cdot 100\,\% = 44,59\,\%.$$

Bei 10 zugrundeliegenden Jahren entspricht das einer jährlichen Steigerung von $44,59\,\% : 10 = 4,46\,\%$.

b) Von 1960 bis 1970 wurde das Ergebnis um $395\,000\,\text{t} - 334\,000\,\text{t} = 61\,000\,\text{t}$ gesteigert. Das entspricht einer Gesamtsteigerung um

$$\frac{61\,000\,\text{t}}{334\,000\,\text{t}} \cdot 100\,\% = 18,26\,\%.$$

Bei 10 zugrundeliegenden Jahren entspricht das einer jährlichen Steigerung von $18,26\,\% : 10 = 1,83\,\%$.

c) Von 1970 bis 1974 wurde das Ergebnis um $424\,000\,\text{t} - 395\,000\,\text{t} = 29\,000\,\text{t}$ gesteigert. Das entspricht einer Gesamtsteigerung um

$$\frac{29\,000\,\text{t}}{395\,000\,\text{t}} \cdot 100\,\% = 7,34\,\%.$$

Bei 3 zugrundeliegenden Jahren entspricht das einer jährlichen Steigerung von $7,34\,\% : 3 = 2,45\,\%$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 170612:

Nach 5 Stunden Fahrt ist das erste Schiff, dessen Geschwindigkeit wir kennen, 90 km ($90 = 5 \cdot 18$) gefahren. Wenn das andere nun noch 45 km entfernt ist, muss es 105 km gefahren sein ($105 = 240 - 90 - 45$). Da es diese in 5 Stunden zurückgelegt hat, legte es 21 km/h zurück ($21 = 105 : 5$).

Aufgeschrieben und gelöst von Gerd Wachsmuth

Lösung 170613:

Klasse 6a:

Es wurden $27 \cdot 5 = 135$ Flaschen und $27 \cdot 8\,\text{kg} = 216\,\text{kg}$ Altpapier gesammelt. Das ergibt $135 \cdot 5 + 216 \cdot 15 = 675 + 3240 = 3915$ Pfennig bzw. $39,15$ M.

Klasse 6b: 25 M

Zusammen haben also beide Klassen $39,15\,\mathrm{M} + 25\,\mathrm{M} = 64,15\,\mathrm{M}$ zur Verfügung. Das Geld reicht für die gemeinsame Eisenbahnfahrt.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 170614:
Es werden die Sprunghöhen der Schüler mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vornamen bezeichnet. Dann gilt:

(1) $D > A > F$

(2) $E > F$

(3) $A = C$, $C > E$

(4) $A > B$, $C > B$, $D > B$, $E > B$, $F > B$

Aus (4) folgt, daß Bernd Letzter war.

Aus (2) und (3) folgt $A = C > E > F$.

Gemeinsam mit (1) erhält man die gesuchte Reihenfolge: Detlef, Anton und Christian (gleiche Sprunghöhe), Ernst, Frank, Bernd.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

17. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 170621:

Am ersten Tag legte man $\frac{1}{3}$ und am dritten Tag $\frac{1}{4}$ der Gesamtstrecke zurück. Damit wurde wegen $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ an diesen beiden Tagen $\frac{7}{12}$ der gesamten Strecke bewältigt.

Die restlichen 150 km sind also genau $\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Wegen $150 : 5 = 30$ sind folglich 30 km genau $\frac{1}{12}$ der Gesamtstrecke; diese beträgt demnach $12 \cdot 30\,\text{km} = 360\,\text{km}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 170622:

Da (2) falsch ist, belegte Elke weder den vorletzten noch einen besseren Platz, sie wurde also Fünfte.

Da (1) falsch ist, kam Christa unmittelbar vor Elke ins Ziel und wurde daher Vierte.

Da (4) falsch ist, belegte Franziska den dritten Platz. Folglich verblieben der erste und zweite Platz für Doris und Gitta.

Da (3) falsch ist, lief Doris nicht schneller als Gitta. Da ihre Zeit ferner nicht dieselbe war wie die Gittas, belegte sie folglich den zweiten Platz und Gitta den ersten.

Die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs lautete mithin: Gitta, Doris, Franziska, Christa, Elke.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

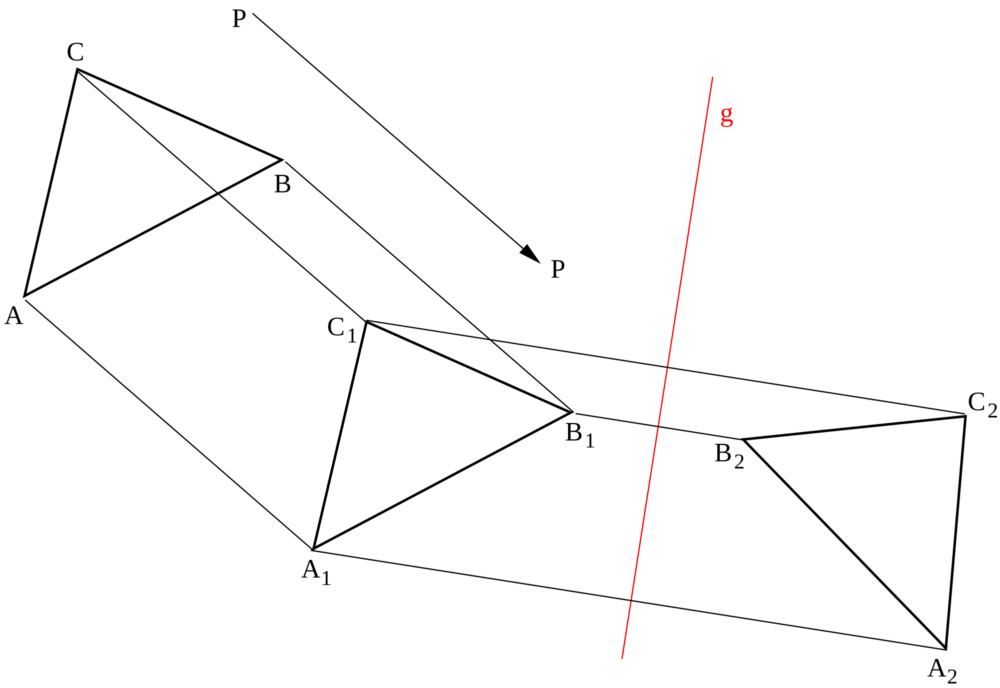
Lösung 170623:

Aus 36 Rohlingen ergeben sich zunächst 36 Einzelteile; die Abfallspäne von je 6 Rohlingen ergeben dann noch einen Rohling, d.h. aus den Abfallspänen von 36 Rohlingen kann man 6 neue Rohlinge anfertigen. Aus ihnen lassen sich noch einmal 6 Einzelteile herstellen. Die dabei anfallenden Späne ergeben einen weiteren Rohling. Fertigt man aus ihm wieder ein Einzelteil an, so fallen zwar wieder Späne an, diese lassen sich aber nicht mehr (nach Einschmelzen) zur Herstellung eines weiteren Rohlings verwenden.

Also beträgt die gesuchte Anzahl von Einzelteilen $36 + 6 + 1 = 43$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 170624:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 180611:

Ein Zehntel der 260 Wohnungen sind 26 Wohnungen; denn es gilt $260 : 10 = 26$.
Ein Viertel der 260 Wohnungen sind 65 Wohnungen; denn es gilt $260 : 4 = 65$.
Die restlichen Wohnungen sind 169 Wohnungen; denn es gilt $260 - 26 - 65 = 169$.

Die Wohnfläche der zuerst genannten 26 Wohnungen beträgt $1\,430\ \mathrm{m}^2$; denn es gilt $26 \cdot 55 = 1\,430$.
Die Wohnfläche der danach genannten 65 Wohnungen beträgt $4\,355\ \mathrm{m}^2$; denn es gilt $65 \cdot 67 = 4\,355$.
Die Wohnfläche der restlichen 169 Wohnungen beträgt $13\,520\ \mathrm{m}^2$; denn es gilt $169 \cdot 80 = 13\,520$.

Die gesamte Wohnfläche der 260 Wohnungen beträgt $19\,305\ \mathrm{m}^2$; denn es gilt $1\,430 + 4\,355 + 1\,3520 = 1\,9305$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180612:

Wenn z den Bedingungen genügt, so ist die Zehntausenderziffer von z wegen (1) eine der Zahlen 6, 7, 8, 9. Weiterhin ist z wegen (2) durch 9 teilbar, und daher ist auch die Quersumme von z durch 9 teilbar.

Da die Summe der Tausender-, Zehner- und Einerziffer 9 ist, muß die Hunderterziffer die obengenannte Zehntausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 zu einer durch 9 teilbaren Zahl ergänzen. Das ist nur bei den Zahlen

$$63360,\ 73260,\ 83160,\ 93060,\ 93960$$

der Fall.

Jede der hiermit angegebenen Zahlen erfüllt (1) und, da sie durch 9 teilbar ist, auch (2). Daher sind die angegebenen Zahlen alle gesuchten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180613:

Fred ist keiner der beiden Schüler der 7. Klasse, mit denen er sich unterhielt. Er ist auch nicht der Schüler der 6a, da dieser in der von Hans gegebenen Aufzählung außer Fred erwähnt wird. Also gehört Fred der 6b an.

Zur Klasse 6a gehören nach dieser Aufzählung weder Fred noch Gerd. Da ferner Hans einer der Schüler der 7. Klasse ist, mit denen Fred sich unterhielt, gehört auch Hans nicht zur 6a. Folglich gehört Ingo der 6a an. Die beiden Schüler der 7. Klasse sind also Gerd und Hans.

Der Schüler der 7b kann nicht Gerd sein, da er beide Zeitschriften liest, Gerd aber nur eine. Also gehört Gerd der 7a und Hans der 7b an. Der Schüler, der beide Zeitschriften liest, ist folglich Hans.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180614:

Angenommen, die Aussage ”Frank erhielt einen zweiten Preis” wäre wahr. Dann müßten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde aber bedeuten, daß Klaus ebenfalls einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist die betrachtete Aussage falsch.

Angenommen, die Aussage ”Klaus erhielt keinen zweiten Preis” wäre wahr. Dann müßten die beiden anderen Aussagen falsch sein. Das würde jedoch bedeuten, daß keiner einen zweiten Preis erhielt, im Widerspruch zur Aufgabe. Also ist auch diese Aussage falsch.

Mithin kann nur die Aussage ”Silvia erhielt keinen ersten Preis” wahr sein. Da damit die beiden anderen Aussagen falsch sind, erhielt Klaus einen zweiten Preis. Ferner kann nur Frank einen ersten Preis und mithin Silvia einen dritten Preis errungen haben. Nur bei dieser Preisverteilung ist genau eine von Rainers Aussagen wahr, und die anderen beiden sind falsch.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

18. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 180621:

a) Wegen $115 \cdot 165 = 18\,975$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Gebietes $18\,975\,\text{km}^2$.

b) Wegen $700\,000 \cdot 65 = 45\,500\,000$ ist die Strecke in Wirklichkeit $45\,500\,000\,\text{cm} = 455\,\text{km}$ lang.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180622:

Wenn z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist, so hat z nach (2) nicht 0 als Einerziffer, also ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, ..., 9. Da nach (1) die Zehnerziffer um 1 größer ist, entfällt 9 als Einerziffer und es verbleiben wegen (1) für die zweistelligen Zahlen z nur die Möglichkeiten 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

Von ihnen entfallen 21, 43, 65 und 87, da aus ihnen bei Ziffernvertauschung je eine gerade zweistellige Zahl, also keine Primzahl, entsteht. Ferner entfällt die Zahl 54, aus der die durch 5 teilbare zweistellige Zahl 45 entsteht. Daher können nur die Zahlen 32, 76 und 98 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Tatsächlich sind sie zweistellig und erfüllen (1), und sie erfüllen auch (2), da 23, 67 und 89 zweistellige Primzahlen sind. Die gesuchten Zahlen lauten folglich 32, 76 und 98.

Hinweis zur Korrektur: Ein Nachweis, daß 67 und 89 Primzahlen sind, wird vom Schüler nicht gefordert. Falls ein Schüler alle 21 zweistelligen systematisch untersucht, ob sie die genannten Bedingungen erfüllen, dann gilt das als Lösung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180623:

Wegen $1\,050 - 75 = 975$ und $975 : 3 = 325$ kostet die billigste Ausführung des Artikels $3,25$ M.

Wegen $1\,050 + 75 = 1\,125$ und $1\,125 : 3 = 375$ kostet die teuerste Ausführung des Artikels $3,75$ M.

Wegen $1\,050 - 325 - 375 = 350$ kostet die dritte Sorte $3,50$ M.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 180624:

Wegen $63^2 = 3\,969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt $3\,969\,\text{mm}^2$. Wegen $38\,\text{cm}^2 = 3\,800\,\text{mm}^2$ und $3\,969 - 3\,800 = 169$ haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt $169\,\text{mm}^2$.

Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von $169\,\text{mm}^2$ und daher die Seitenlänge $a = 13\,\text{mm}$. Die Seitenlänge

a der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 190611:

Die Abfahrzeiten lauten

für den ersten Bus:	12.00, 12.45, 13.30, 14.15, 15.00, ...,
für den zweiten Bus:	12.00, 12.30, 13.00, 13.30, 14.00, 14.30, 15.00, ...,
für den dritten Bus:	12.00, 12.36, 13.12, 13.48, 14.24, 15.00, ...,
für den vierten Bus:	12.00, 13.00, 14.00, 15.00, ...,

Daraus ist zu sehen: Die vier Busse fahren erstmalig um 15.00 Uhr wieder gleichzeitig ab. Bis dahin hat

der erste Bus	4 Fahrten
der zweite Bus	6 Fahrten
der dritte Bus	5 Fahrten
der vierte Bus	3 Fahrten

durchgeführt.

Hinweis: Die Aufgabe kann auch unter Anwendung des Begriffes k.g.V. gelöst werden. Die Anzahl der Minuten zwischen 12.00 Uhr und dem gesuchten Zeitpunkt muß das k.g.V. der Zahlen 45, 30, 36 und 60, d.h. die Zahl 180 sein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190612:

Angenommen, vier Zahlen erfüllen die gestellten Bedingungen. Die erste Zahl sei mit a bezeichnet. Die zweite, Zahl lautet dann $2a - 1$, die dritte Zahl $2(2a - 1) - 1 = 4a - 2 - 1 = 4a - 3$, die vierte Zahl $2(4a - 3) - 1 = 8a - 6 - 1 = 8a - 7$. Daher ist die Summe der vier Zahlen

$$a + 2a - 1 + 4a - 3 + 8a - 7 = 15a - 11.$$

Aus $15a - 11 = 79$ folgt $15a = 90$. Daraus folgt, daß die erste Zahl $a = 6$ lautet, die zweite, dritte, vierte also 11, 21 bzw. 41.

Daher können nur die Zahlen 6, 11, 21, 41 (in dieser Reihenfolge) die Bedingungen erfüllen.

Die folgende Überprüfung zeigt, daß sie alle geforderten Bedingungen erfüllen:

Es gilt:
$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 - 1 &= 11, \\ 2 \cdot 11 - 1 &= 21, \\ 2 \cdot 21 - 1 &= 41 \text{ und} \\ 6 + 11 + 21 + 41 &= 79. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Aufgabe kann auch durch systematisches Probieren, gelöst werden (etwa $4+7+13+25=49$; $5+9+17+33=64$; $6+11+21+41=79$; $7+13+25+49=94$). Dabei muß bewiesen werden, daß es keine weitere Lösung gibt, z.B., indem bemerkt wird, daß bei Vergrößerung der Anfangszahl sich alle Summanden und damit die Summe vergrößern.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190613:

Cornelias Meinung ist falsch; denn greift man 12 Kugeln heraus, so erreicht man nicht mit Sicherheit, daß sich darunter 5 von gleicher Farbe befinden. Es können nämlich 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe Kugeln herausgegriffen worden sein.

Birgits Meinung ist wahr; denn hat man 13 Kugeln herausgegriffen, so gibt es nur folgende Möglichkeiten:

1. Die ersten 12 herausgegriffenen Kugeln sind 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann muß die 13. Kugel eine dieser Farben haben; von dieser Farbe befinden sich also insgesamt 5 unter den 13 herausgegriffenen Kugeln, wie es erreicht werden sollte.

2. Die Farbverteilung unter den ersten 12 Kugeln ist eine andere als 4 rote, 4 blaue und 4 gelbe. Dann hat sich gegenüber dieser Verteilung die Anzahl für mindestens eine dieser Farben erhöht, da sonst nicht insgesamt 12 Kugeln in der geänderten Verteilung vorliegen könnten. Also befinden sich bereits unter 12 Kugeln von mindestens einer Farbe mindestens 5 Kugeln. Damit ist dies erst recht für die 13 herausgegriffenen Kugeln der Fall.

Ankes Meinung ist ebenfalls wahr; denn schon unter 13, erst recht also unter 15 Kugeln befinden sich 5 von gleicher Farbe.

Hinweis: Der Beweis, daß Birgits Meinung wahr ist, kann auch kürzer durch folgende Überlegung geführt werden: Wären unter 13 herausgegriffenen Kugeln nicht 5 von gleicher Farbe, so wären insgesamt höchstens, 4 rote, höchstens 4 blaue und höchstens 4 gelbe, also zusammen höchstens 12 Kugeln herausgegriffen worden.

Bei der Korrektur ist der Unterschied zwischen diesen beiden Varianten zu beachten, daß man nämlich bei der einen Variante zwei Fälle unterscheiden muß, bei der änderen dagegen nicht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190614:

Dieter erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 1. und die 2. Aussage wahr gewesen.

Auch Frank erhielt keinen zweiten Preis; denn hätte er einen zweiten Preis erhalten, so wären die 2. und die 3. Aussage wahr gewesen.

Also erhielt Karin einen zweiten Preis. Somit waren die 2. und die 3. Aussage falsch, die erste dagegen wahr. Folglich erhielt Dieter, da er weder einen ersten noch einen zweiten Preis erhalten haben konnte, einen dritten Preis. Den ersten Preis konnte schließlich nur Frank errungen haben; denn die beiden übrigen Preise hatten ja Karin und Dieter bekommen.

Hinweis: Für Schüler ist möglicherweise eine Fallunterscheidung naheliegender, die von der Frage ausgeht, welche der drei Aussagen die wahre ist. Dies führt auch zu einem möglichen Lösungsweg, allerdings auf etwas umständlichere Weise.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

19. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 190621:

Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen $360 - 226 = 134$ hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°. Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen $180 - 134 = 46$ hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.

Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190622:

Der Gesamtpreis aller sechs Geschenke beträgt 119 M. Da genau fünf Geschenke gekauft wurden, blieb genau eines zurück. War es das zu

15 M, 16 M, 18 M, 19 M, 20 M bzw. 31 M,

so hatten beide Käufer zusammen

101 M, 103 M, 101 M, 100 M, 99 M bzw. 88 M

gezahlt.

Zahlte der erste Käufer x Mark, so bezahlte der zweite $2x$ Mark. Die von beiden gezahlte Summe, $3x$ Mark, muß folglich durch 3 teilbar sein. Das trifft nur für den Betrag von 99 M zu. Also wurde das Geschenk zu 20 M nicht gekauft; ferner ist $3x = 99$, der erste Käufer bezahlte 33 M.

Hätte er als eines seiner beiden Geschenke das zu 16 M, 19 M oder 31 M gekauft, so müßte das andere 17 M, 14 M bzw. 2 M gekostet haben; diese Preise kamen aber nicht vor. Also hat der erste Käufer die Geschenke zu 15 M und 18 M gekauft, der zweite Käufer folglich die Geschenke zu 16 M, 19 M und 31 M.

Hinweis zur Korrektur: Da die Existenz einer Lösung aus der Formulierung der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist (bei einem Lösungsweg, der durch logische Schlüsse, etwa wie angegeben, zu den gesuchten Zahlen gelangt) eine Probe nicht erforderlich. Werden dagegen die Zahlen lediglich (d.h. ohne solche Herleitung) genannt (und auf das Erfülltsein der Bedingungen überprüft), so ist der Nachweis zu fordern, daß es keine andere Lösung gibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190623:

Wenn die Forderungen erfüllt sind und dabei der erste Abschnitt x Stunden dauert, so dauert der zweite $3x$ Stunden und der dritte $\frac{3}{2}x$ Stunden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x + 3x + \frac{3}{2}x &= 110, \\ \frac{2}{2}x + \frac{6}{2}x + \frac{3}{2}x &= 110, \\ \frac{11}{2}x &= 110, \\ \frac{1}{2}x &= 10, \\ x &= 20. \end{aligned}$$

Also können die Forderungen nur dadurch erfüllt werden, daß man für den ersten Abschnitt 20 Stunden und somit für den zweiten 60 Stunden und für den dritten 30 Stunden plant.

Diese Zeiten erfüllen die Forderungen; denn 60 Stunden sind dreimal so viel Zeit wie 20 Stunden, 30 Stunden dauern halb so lange wie 60 Stunden, und wegen $20+60+30 = 110$ ergibt sich die vorgesehene Gesamtzeit.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 190624:

Jede Minute hat 60 Sekunden, wegen $15 \cdot 60 = 900$ hat der Stempel also genau 900 Zahlen zu drucken, d.h. die natürlichen Zahlen von 0 bis 899.

Beim Drucken der Zahlen von 0 bis 9 kommt die Ziffer 1 genau 1mal vor.

Setzt man vor jede dieser Zahlen (also an die Zehnerstelle) jede der neun Ziffern 1,...,9, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 10 bis 99, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an der Einerstelle insgesamt genau 9mal vor. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau zehn mit der Zehnerziffer 1 (nämlich die Zahlen 10,...,19). Somit kommt in den Zahlen von 10 bis 99 die Ziffer 1 an der Zehnerstelle insgesamt genau 10mal vor.

Setzt man vor jede der Zahlen von 0 bis 99 (nachdem die Zahlen von 0 bis 9 durch Vorschalten einer Zehnerziffer 0 zweistellig geschrieben wurden) an die Hunderterstelle jede der acht Ziffern 1,...,8, so erhält man alle natürlichen Zahlen von 100 bis 899, jede genau einmal. Somit kommt in diesen Zahlen die Ziffer 1 an den Einer- und Zehnerstellen insgesamt achtmal so oft vor wie das bisher ermittelte Vorkommen ($1+9+10 = 20$), d.h. genau 160mal. Ferner gibt es unter diesen Zahlen genau 100 mit der Hunderterziffer 1 (nämlich die Zahlen 100,...,199). Somit kommt in den Zahlen von 100 bis 899 die Ziffer 1 an der Hunderterstelle insgesamt genau 100mal vor.

Damit sind alle zu erfassenden Ziffern 1 berücksichtigt; ihre Anzahl beträgt somit $1+9+10+160+100 = 280$.

Hinweis zur Korrektur: Auch ein stärker "probierendes Abzählen" kann grundsätzlich als mathematisch zulässiges Hilfsmittel dienen. Jedoch ist die zu bearbeitende Zahlenmenge bewußt so groß gewählt worden, daß auch bei solchen Lösungsdarstellungen irgend ein systematisierendes Zusammenfassen erkennbar sein sollte.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200611:

Wenn eine Eintragung von natürlichen Zahlen für a, h, l, p die Bedingungen erfüllt, so folgt: Es gilt $a = 2p$. In der Diagonalen D_1 steht daher die Summe $2p + p + 2p = 5p$.

Laut Aufgabe ist $5p = 80$, also $p = 16$ und $a = 32$.

Ferner folgt $l + 16 + h = 80$, also $l + h = 64$.

Wäre die Primzahl l größer oder gleich 7, so wäre h größer als das Zehnfache hiervon, d.h. $h > 70$ und daher $l + h > 77$, im Widerspruch zu $l + h = 64$. Daher kann l nur eine der Primzahlen 2, 3, 5 sein.

Für $l = 2$ ergäbe sich $h = 62$, also keine Primzahl. Demnach verbleiben nur die Möglichkeiten, daß entweder $l = 3$, $h = 61$ oder $l = 5$, $h = 59$ ist. Daher können nur die Eintragungen

32		3
	16	
61		32

32		5
	16	
59		32

alle geforderten Bedingungen erfüllen.

Sie erfüllen diese Bedingungen; denn es gilt: $32 + 16 + 32 = 80$, $3 + 16 + 61 = 80$, $5 + 16 + 59 = 80$, 32 ist doppelt so groß wie 16, die Zahlen 3, 61, 5, 59 sind Primzahlen, 61 ist größer als das Zehnfache von 3, ebenso ist 59 größer als das Zehnfache von 5. Also erfüllen genau die beiden angegebenen Eintragungen die geforderten Bedingungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200612:

Für 14 Tage verbrauchten 25 Urlauber 21 000 g Butter.

Für 1 Tag verbrauchten 25 Urlauber wegen $21\,000 : 14 = 1\,500$ also 1 500 g Butter.

Für 1 Tag verbraucht 1 Urlauber wegen $1\,500 : 25 = 60$ also 60 g Butter.

Für 1 Tag verbrauchen 30 Urlauber wegen $60 \cdot 30 = 1\,800$ also 1 800 g Butter.

Für 6 Tage verbrauchen 30 Urlauber wegen $1\,800 \cdot 6 = 10\,800$ also $10\,800\text{ g} = 10,8\text{ kg}$ Butter.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200613:

Wie die folgende Tabelle zeigt, haben genau die Zahlen 24 und 36 die verlangte Eigenschaft.

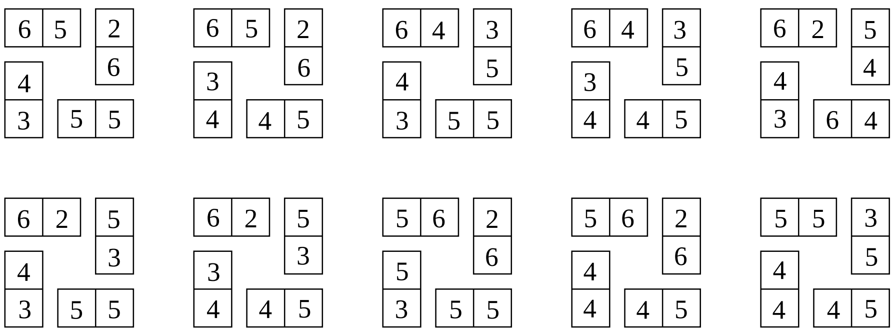
Zahl	Produkt der Ziffern	teilbar?
20	0	nein
21	2	nein
22	4	nein
23	6	nein
24	8	ja
25	10	nein
26	12	nein
27	14	nein
28	16	nein
29	18	nein
30	0	nein
31	3	nein
32	6	nein
33	9	nein
34	12	nein
35	15	nein
36	18	ja
37	21	nein
38	24	nein
39	27	nein

Andere Lösungsvarianten: Durch zusätzliche Überlegungen kann man rechnerische Einzelausführungen einsparen; z.B. kann man unter den Zahlen 21 bis 29 alle ungeraden schon durch die Überlegung ausscheiden, daß sie nicht durch die geraden Produkte $2 \cdot 1$, ..., $2 \cdot 9$ teilbar sind; ebenso scheiden unter den Zahlen 31 bis 38 alle nicht durch 3 teilbaren aus.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200614:

Es genügt, fünf der Möglichkeiten aus der Abbildung anzugeben (oder jeweils statt einer dieser Möglichkeiten eine, die sich aus ihr durch Drehung oder Spiegelung gewinnen läßt).



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 200621:

Die Zeit von 10.05 Uhr bis 11.20 Uhr beträgt 1 h 15 min = 75 min. Wegen $2\,100 - 600 = 1\,500$ hat das Flugzeug in dieser Zeit 1 500 km zurückgelegt. Wegen $75 : 15 = 5$ benötigt es für je 100 km also 5 min, wegen $6 \cdot 5 = 30$ für die noch zurückzulegenden 600 km mithin 30 min. Daher trifft es 30 min nach 11.20 Uhr, d.h. um 11.50 Uhr in B ein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200622:

Wegen $22 \cdot 6 \cdot 1,5 = 22 \cdot 9 = 198$ enthält das bis zur Höhe von $1,50$ m gefüllte Becken $198\,\text{m}^3$ Wasser. Da $1\,\text{m}^3 = 1\,000\,\text{l}$ sind, enthält das Becken also $198\,000\,\text{l}$ Wasser. Wegen $198\,000 : 900 = 220$ ist es somit nach genau 220 Minuten bis zur angegebenen Höhe gefüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200623:

Eine Zahl ist genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie durch das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.) dieser Zahlen teilbar ist. Wegen der Primzahlzerlegungen

$$9 = 3^2, \qquad 12 = 2^2 \cdot 3, \qquad 14 = 2 \cdot 7$$

ist dieses k.g.V. die Zahl $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

Also ist eine natürliche Zahl z genau dann durch 9, 12 und 14 teilbar, wenn es zu ihr eine natürliche Zahl n mit $z = 252 \cdot n$ gibt. Alle gesuchten Zahlen z erhält man daher aus denjenigen n, für die $1\,000 \leq 252n \leq 1\,700$ gilt.

Nun stellt man fest:

Für $n = 3$ gilt $252n = 252 \cdot 3 = 756 < 1\,000$;
für $n = 7$ gilt $252n = 252 \cdot 7 = 1764 > 1\,7000$;

für diese n erhält man also keine Zahlen z, die die genannten Bedingungen der Ungleichung erfüllen.

Für $n = 4$ wird $z = 252 \cdot 4 = 1\,008$;
für $n = 5$ wird $z = 252 \cdot 5 = 1\,260$;
für $n = 6$ wird $z = 252 \cdot 6 = 1\,512$;

diese drei Zahlen erfüllen also die Bedingung $1\,000 \leq z \leq 1\,700$. Daher sind genau 1008, 1260 und 1512 die gesuchten Zahlen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 200624:

Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, für die die gemachten Angaben zutreffen.

Dann ist Gerd wegen (3) und (4) weder der Schüler der Klasse 6b noch der Schüler der Klasse 6a noch der der Klasse 5b. Also besucht Gerd die Klasse 5a und liest wegen (2) [oder wegen (3)] die Zeitschrift "alpha" regelmäßig.

Folglich gehört Ingo nicht der Klasse 5a an, nach (4) auch keiner der Klassen 6a oder 5b. Somit besucht Ingo die Klasse 6b und liest wegen (3) die Zeitschrift "Frösi" regelmäßig.

Hans gehört demnach weder der Klasse 5a noch der Klasse 6b an. Da er nach (2) regelmäßig die Zeitschrift "alpha" liest, ist er wegen (1) auch nicht der Schüler der Klasse 5b. Also besucht Hans die Klasse 6a.

Für Fred verbleibt somit nur noch die Klasse 5b. Hiernach und nach (1) liest er regelmäßig die Zeitschrift "Frösi". Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, für die die gemachten Angaben zutreffen, dann kann es nur die folgende Zuordnung sein:

Vorname	Klasse	Zeitschrift
Gerd	5a	"alpha"
Fred	5b	"Frösi"
Hans	6a	"alpha"
Ingo	6b	"Frösi"

Man überzeugt sich leicht, daß für diese Zuordnung die gemachten Angaben tatsächlich zutreffen. Damit ist gezeigt, daß genau diese Zuordnung mit den gemachten Angaben übereinstimmt.

Zweiter Lösungsweg: Angenommen, es gibt eine solche Zuordnung, die die gestellten Bedingungen (1) bis (4) erfüllt. Da jeder Schüler genau eine der beiden Zeitschriften regelmäßig liest, folgt aus (1) und (3) die Feststellung:

(5) Die beiden Schüler aus den Klassen 5b bzw. 6b lesen regelmäßig die Zeitschrift "Frösi"; Gerd liest regelmäßig die Zeitschrift "alpha".

Wegen (2) lesen mindestens zwei Schüler regelmäßig die Zeitschrift "alpha". Wegen (5) können dies nur die Schüler aus'den Klassen 5a bzw. 6a sein, und wegen (2) folgt hieraus:

(6) Hans geht in die Klasse 6a und liest regelmäßig die Zeitschrift "alpha",

Aus (3) und (5) folgt dann:

(7) Fred geht in die Klasse 5b und liest regelmäßig die Zeitschrift "Frösi".

Da Gerd wegen (3) nicht in die Klasse 6b geht, muß er wegen (6) und (7) in die Klasse 5a gehen, woraus dann wegen (5) folgt:

(8) Gerd geht in die Klasse 5a und liest regelmäßig die Zeitschrift "alpha".

Als letzte Möglichkeit verbleibt danach für Ingo:

(9) Ingo geht in die Klasse 6b und liest regelmäßig die Zeitschrift "Frösi".

Damit ist gezeigt: Wenn es eine Zuordnung gibt, die die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt, dann kann es nur die in (6) bis (9) angegebene Zuordnung sein.

Man überzeugt sich leicht, daß diese Zuordnung tatsächlich die gegebenen Bedingungen (1) bis (4) erfüllt. Folglich ist die genannte Zuordnung die einzige, die alle gestellten Bedingungen erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Beim zweiten Lösungsweg erkennt man, daß zur Gewinnung der Lösung (Eindeutigkeitsnachweis) die Angabe (4) nicht benötigt wird. Würde man in der Aufgabe die Angabe (4) durch eine Angabe ersetzen, die den Angaben (1), (2), (3) widerspricht (etwa durch

(4*) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Hans wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.),

dann würde man beim zweiten Lösungsweg erst bei der Probe merken, daß diese (andere) Aufgabe gar keine Lösung besitzt. Dadurch wird deutlich, daß die Probe hier nicht entbehrlich ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 210611:

a) *1. Lösungsweg:* Verringert man die größere Seitenlänge des Bechtecks um 20 m, so verringert sich sein Umfang um 40 m, erreicht also den Wert 20 m. Andererseits entsteht dabei ein Quadrat. Wegen $20 : 4 = 5$ beträgt seine Seitenlänge 5 m; dies ist zugleich die Länge der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Die Länge seiner größeren Seite beträgt somit 25 m. Wegen $5 \cdot 25 = 125$ beträgt sein Flächeninhalt 125 m^2.

2. Lösungsweg (durch "systematisches Probieren", z.B. so): Die Summe aus den Längen der kleineren und der größeren Seite des Rechtecks, also sein halber Umfang, beträgt 30 m. Die folgende Tabelle enthält alle Möglichkeiten, die Summe 30 aus einer kleineren und einer größeren natürlichen Zahl zu erhalten:

Maßzahl der kleineren Seitenlänge	Maßzahl der größeren Seitenlänge	Differenz
0	30	30
1	29	28
...	...	...
4	26	22
5	25	20
6	24	18
...	...	...
14	16	2

Nur für die Maßzahlen 5 und 25 ergibt sich die Differenz 20 u.s.w.

3. Lösungsweg: Wenn die kleinere Seitenlänge x Meter beträgt, so beträgt die größere Seitenlänge $x + 20$ Meter, der Umfang also $4x + 40$ Meter. Daher gilt $4x + 40 = 60$. Hieraus folgt $4x = 20$, also $x = 5$. (Man kann auch so schließen: Für $x < 5$ ist $4x + 40 < 60$, für $x > 5$ ist $4x + 40 > 60$; also verbleibt nur $x = 5$.) u.s.w.

b) Im Maßstab $1 : 250$ wird wegen $5\,\text{m} = 500\,\text{cm}$ und $500 : 250 = 2$ die kleinere Seitenlänge durch die Seitenlänge 2 cm wiedergegeben. Wegen $25\,\text{m} = 2\,500\,\text{cm}$ und $2\,500 : 250 = 10$ wird die größere Seitenlänge durch die Länge 10 cm wiedergegeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210612:

$$\begin{array}{ccccc}
646 & : & 19 & = & 34 \\
- & & \cdot & & + \\
162 & - & 16 & = & 146 \\
\hline
484 & - & 304 & = & 180
\end{array}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210613:

1. Lösungsweg: Hätte Heike 8 Kohlköpfe mehr und Kerstin 5 Kohlköpfe mehr geerntet, so wären es wegen $128+8+5 = 141$ insgesamt 141 Kohlköpfe gewesen. Andererseits hätten dann alle drei Mädchen gleich viele Kohlköpfe geerntet, nämlich jede so viele wie Bianka. Wegen $141 : 3 = 47$ hat also Bianka 47 Kohlköpfe geerntet, wegen $47 - 8 = 39$ hat Heike 39 Kohlköpfe geerntet, wegen $47 - 5 = 42$ hat Kerstin 42 Kohlköpfe geerntet.

2. Lösungsweg: Hat Heike x Kohlköpfe geerntet, so hat Bianka $x + 8$ und folglich Kerstin $x + 3$ Kohlköpfe geerntet. Daher gilt

$$\begin{aligned}
x + x + 8 + x + 3 &= 128 \\
3x + 11 &= 128 \\
3x &= 117 \\
x &= 39,
\end{aligned}$$

d.h., Heike hat 39 Kohlköpfe geerntet, Bianka folglich 47 Kohlköpfe und Kerstin 42 Kohlköpfe.

Hinweis zur Korrektur: Aus der Aufgabenstellung kann die Existenz der gesuchten drei Anzahlen entnommen werden. Daher ist eine Probe nicht erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210614:

Eine Serie der gesuchten Art ist z.B.:

1 auf 5, 7 auf 11, 9 auf 12, 4 auf 8, 2 auf 6, 3 auf 10.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

21. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 210621:

Bei der Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde legt der Zug jeweils in 10 Minuten ein Sechstel der Strecke 45 km zurück, das sind (wegen $45 : 6 = 7\frac{1}{2}$) jeweils $7\frac{1}{2}$ km. Berücksichtigt man noch die Wartezeit, so ergibt sich folgende Tabelle:

Uhrzeit	9.40	9.50	10.00	10.10	10.20	10.30	10.40	10.50	11.00	11.10
Kilometer	$7\frac{1}{2}$	15	15	15	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210622:

Angenommen, es gibt eine solche Zahl. Dann folgt: Die Zahl ist durch 6 teilbar, also gerade; ihre Einerziffer lautet mithin 0, 2, 4, 6 oder 8.

Die Zahl ist ferner durch 9 teilbar; dasselbe gilt folglich für ihre Quersumme. Diese ist um $4+1+8$, d.h. um 13 größer als die Summe aus ihrer Zehner- und ihrer Einerziffer. Setzt man der Reihe nach für die Einerziffer 0, 2, 4, 6, 8, dann ergibt sich für die Zehnerziffer jeweils der in der folgenden Tabelle angegebene Wert:

Einerziffer	Summe aus 13 und der Einerziffer	Zehnerziffer
0	13	5
2	15	3
4	17	1
6	19	8
8	21	6

Also kann die gesuchte Zahl nur eine der Zahlen 41 850, 41 832, 41 814, 41 886, 41 868 sein. Von diesen ist nur 41 832 durch 7 teilbar.

Daher kann nur diese Zahl an der angegebenen Stelle im Lehrbuch gestanden haben; denn sie hat als einzige alle verlangten Teilbarkeitseigenschaften und ist von der Form 418**, wie in der Aufgabe angegeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210623:

In dem Betrieb wurden im Februar 10, im März 20, ..., im Juni 50, ..., im Dezember 110 Tische mehr hergestellt als im Monat Januar. Wegen

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 + 110 = 660$$

sind das insgesamt 660 Tische mehr, als wenn die Produktionssteigerung nicht erfolgt wäre, d.h. in allen 12 Monaten gleich viele Tische hergestellt worden wären, ebensoviele wie im Januar.

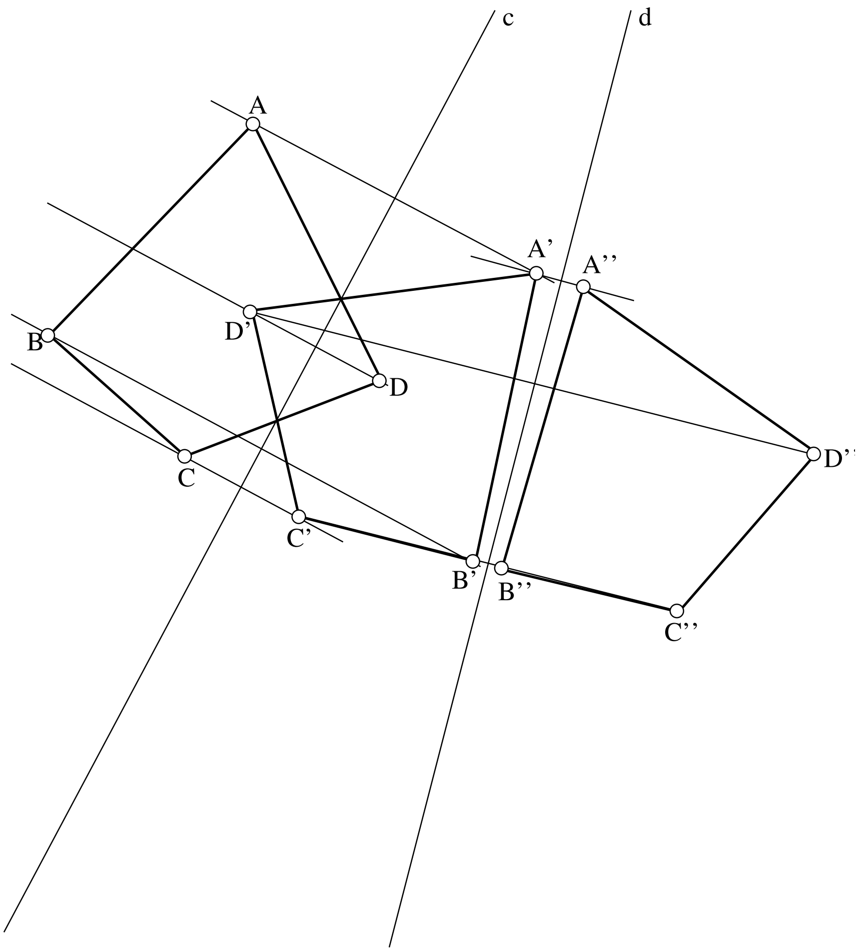
Wegen $1\,920 - 660 = 1\,260$ und $1\,260 : 12 = 105$ wurden im Januar somit 105 Tische produziert.

a) Aus $105 + 50 = 155$ folgt, daß im Juni 155 Tische angefertigt wurden.

b) Wegen $105 + 110 = 215$ wurden im Dezember 215 Tische hergestellt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 210624:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220611:

Wegen $60 - 10 = 50$ hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen

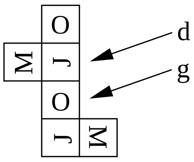
$$60\text{ cm} \cdot 60\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} = 180\,000\text{ cm}^3 = 180\text{ dm}^3.$$

Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 dm^3 hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen $180 : 9 = 20$ sind das genau 20 Eimer Wasser.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220612:

a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) 

Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220613:

Bezeichnet man jeweils die Sprunghöhe eines Pioniers mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens, so erhält man:

Aus (1) folgt $D > A$,

aus (3) folgt $A = C$ und $C > E$,

aus (2) folgt $E > F$,

aus (4) folgt $F > B$.

Die gesuchte Reihenfolge lautet daher:

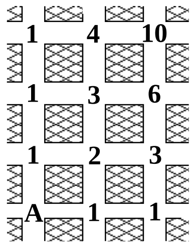
$$D > A = C > E > F > B.$$

Hinweis: Wie der Lösungsweg zeigt, werden nicht alle Angaben aus (1) bis (4) zur Ermittlung der Reihenfolge verwendet. Sie sind aber sämtlich bei der angegebenen Reihenfolge erfüllt. (Diese Feststellungen werden vom

Schüler nicht verlangt.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220614:



a) In der Abbildung sind die gesuchten Kreuzungen mit 1 bezeichnet.

b) Jeder mögliche kurze Weg von A nach Z führt entweder über U oder über V. Von U oder V aus hat man aber jeweils nur genau eine Möglichkeit, auf möglichst kurzem Wege nach Z zu kommen. Also kann man die Anzahl aller möglichst kurzen Wege von A nach Z berechnen, indem man die entsprechenden Anzahlen für U und V addiert.

c) Ausgehend von den in a) gefundenen Kreuzungen findet man mit Hilfe der Überlegung aus b) der Reihe nach die Anzahlangaben

$$2 = 1 + 1, \qquad 3 = 1 + 2, \qquad 4 = 1 + 3, \qquad 6 = 3 + 3, \qquad 10 = 4 + 6$$

in der Abbildung.

d) Es gibt genau die folgenden möglichst kurzen Wege von A nach X:

s s s w w,
s s w s w,
s s w w s,
s w s s w,
s w s w s,
s w w s s,
w s s s w,
w s s w s,
w s w s s,
w w s s s.

Ihre Aufzählung erfolgte hier "lexikographisch" (d.h. nach der Regel für die Anordnung in einem Lexikon), was eine bessere Übersicht zur Sicherung der Vollständigkeit ergibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 220621:

Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:

$$\begin{aligned} A_W &= (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280\,\text{cm}^2 = 2\,140 \cdot 280\,\text{cm}^2 \\ &= 599\,200\,\text{cm}^2, \end{aligned}$$

das sind $59,92\,\text{m}^2$, also rund $60\,\text{m}^2$.

Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund

$$\begin{aligned} L_W &= 60 \cdot (28 + 26 + 83)\,\text{Pf} \\ &= 60 \cdot 137\,\text{Pf} \\ &= 8\,220\,\text{Pf}, \end{aligned}$$

das sind $82,20\,\text{M}$.

Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten:

$$\begin{aligned} A_D &= (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350)\,\text{cm}^2 \\ &= (550 + 170) \cdot 350\,\text{cm}^2 \\ &= 720 \cdot 350\,\text{cm}^2 \\ &= 252\,000\,\text{cm}^2, \end{aligned}$$

das sind $25,2\,\text{m}^2$, also rund $25\,\text{m}^2$.

Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit rund

$$\begin{aligned} L_D &= 25 \cdot (28 + 26 + 112)\,\text{Pf} \\ &= 25 \cdot 166\,\text{Pf} \\ &= 4\,183\,\text{Pf}, \end{aligned}$$

das sind $41,83\,\text{M}$.

Die gesamten Lohnkosten L betragen daher

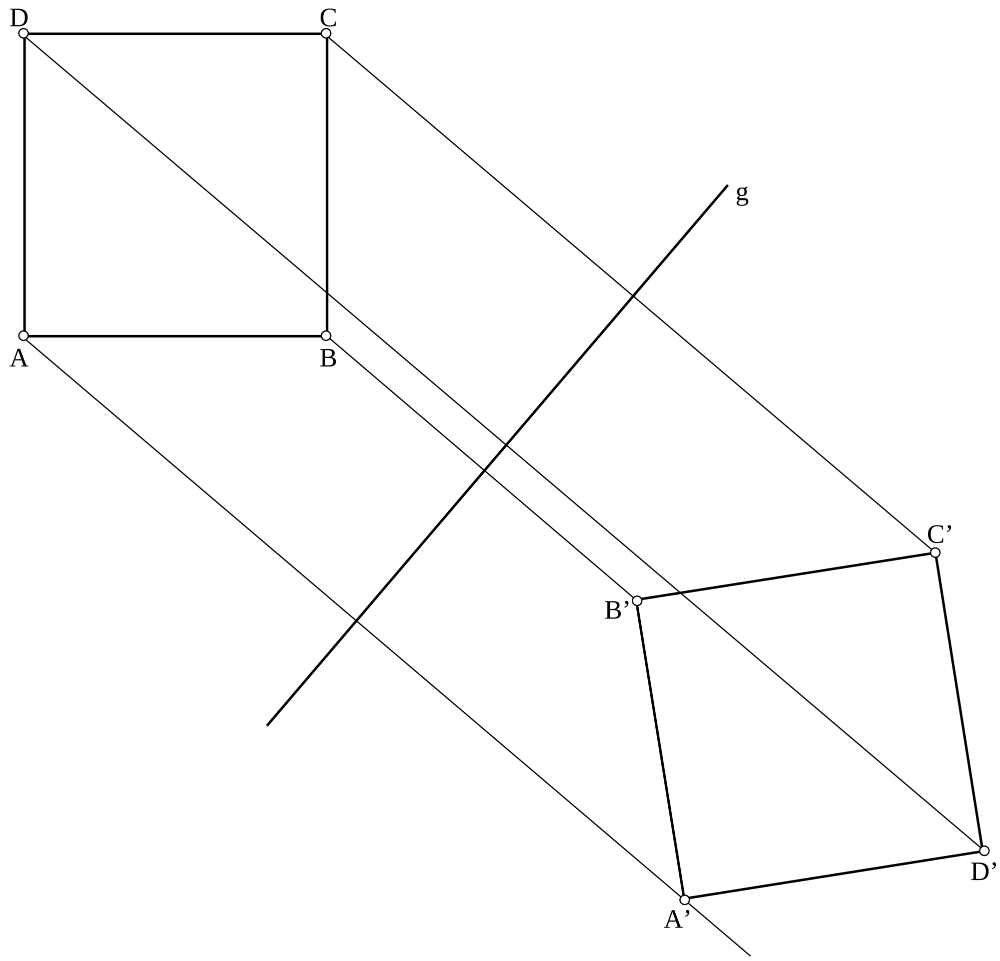
$$L = (82,20 + 41,83)\,\text{M} = 124,03\,\text{M},$$

das sind rund $124\,\text{M}$.

Hinweis: Auch Rechenwege mit weniger gerundeten Zwischenergebnissen sind zu akzeptieren. Andererseits kann man auch sogleich L_W und L_D runden. Dagegen ist es nicht sinnvoll, die Kosten je Quadratmeter vorzeitig zu runden, da sie mit großen Flächenbeträgen multipliziert werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220622:



Hinweise zur Korrektur: Zu werten sind erstens die richtige Lage von g, A', C', D' sowie der Geraden durch A, A', B, B', C, C', D, D', zweitens die Vollständigkeit von Konstruktionshilfslinien (Kreise zur Ermittlung von Punkten, die g festlegen, sowie zum Streckenabtragen bei Ermittlung der Bildpunkte A', C', D'). Zu akzeptieren sind auch andere Konstruktionsmöglichkeiten, z.B. für C', D' nach Gewinnung von A' durch Konstruktion eines Quadrates über $A'B'$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220623:

1. Lösungsweg:

Geeignete Summanden sind 3, 9, 2 und 18 in dieser Reihenfolge; denn es gilt $3 + 9 + 2 + 18 = 32$ sowie $3 + 3 = 9 - 3 = 2 \cdot 3 = 18 : 3 = 6$.

Wäre der erste Summand eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 3, so ergäbe sich durch Addition von 3 eine kleinere (bzw. eine größere) Zahl als 6. Dann müßte der zweite Summand kleiner (bzw. größer) als 9, der dritte kleiner (bzw. größer) als 2 und der vierte kleiner (bzw. größer) als 18 sein. Hiernach wäre die Summe kleiner (bzw. größer) als 32, was der Forderung der Aufgabe widerspricht. Also muß der erste Summand gleich 3 sein, woraus folgt, daß auch für die übrigen Summanden keine anderen Zahlen als die oben angegebenen den Forderungen der Aufgabe entsprechen können.

2. Lösungsweg:

I. Wenn die Forderungen durch vier Summanden erfüllt sind, so folgt:

Ist der dritte Summand x, so entsteht durch Multiplikation mit 3 die Zahl $3x$. Da diese Zahl auch entsteht, wenn man zum ersten Summanden 3 addiert, lautet der erste Summand $3x - 3$. Entsprechend lautet der zweite Summand $3x + 3$ und der vierte Summand $3x \cdot 3 = 9x$. Also gilt

$$3x - 3 + 3x + 3 + x + 9x = 32,$$

woraus $16x = 32$, also $x = 2$ folgt.

Daher können die Forderungen nur erfüllt sein, wenn der erste Summand $3 \cdot 2 - 3 = 3$, der zweite $3 \cdot 2 + 3 = 9$, der dritte 2 und der vierte $9 \cdot 2 = 18$ lautet.

II. Diese Summanden erfüllen alle Forderungen. (Überprüfung wie zu Beginn des 1. Lösungsweges)

Andere Lösungsdarstellungen sind möglich; z.B. lassen sich die hier genannten (oder ähnlich verlaufenden) Überlegungen auch tabellenmäßig wiedergeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 220624:
Aus (7) folgt $c > a$,

aus (1) folgt $a > e$,

aus (4) folgt $e > d$,

aus (6) folgt $d > b$.

Daher können nur bei der Anordnung $c > a > e > d > b$ die Forderungen (1) bis (8) erfüllt sein. Sie sind erfüllbar, z.B. durch $b = 1$, $d = 2$, $e = 4$, $a = 8$, $c = 16$;

denn

8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,

1 ist ein Teiler von 16,

16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 4,

2 ist ein Teiler von 4,

8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 1,

1 ist ein Teiler von 2,

16 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 8,

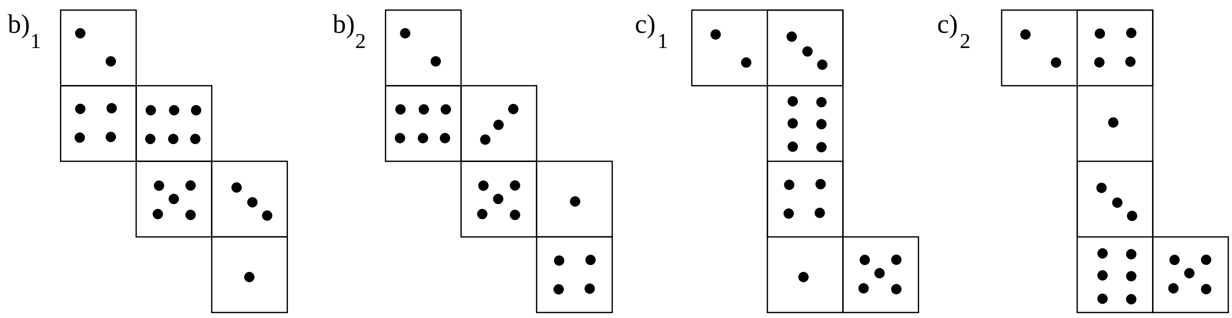
8 ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von 2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

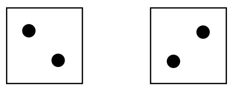
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 230611:



Es gibt genau die in der Abbildung angegebenen Möglichkeiten. Von ihnen ist zu b) und c) je eine anzugeben.

Man kann auch Lösungen zulassen, in denen die Punkte auf den Flächen des Würfels zwar dieselben Zahlen darstellen, aber anders angeordnet sind, z.B.



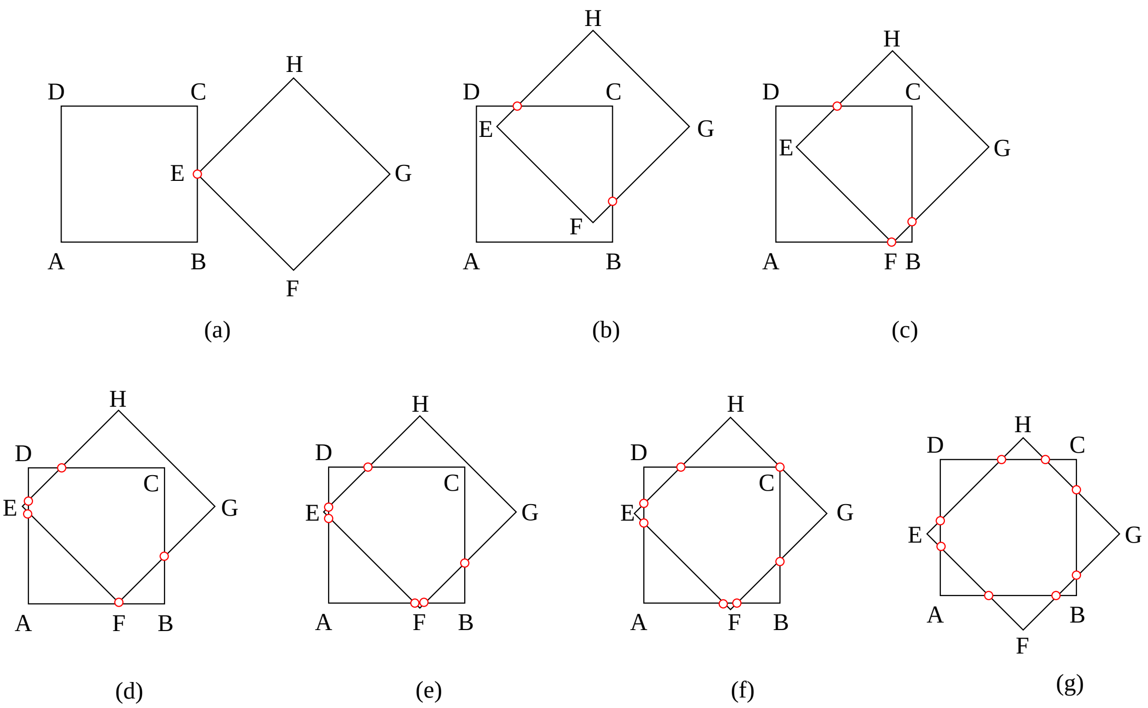
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230612:
Die zweite Brigade kaufte genau zwei Bälle mehr und bezahlte (wegen $24 - 15 = 9$) genau 9 Mark mehr als die erste Brigade. Folglich kostet ein Ball (wegen $9 : 2 = 4,50$) genau $4,50$ Mark.

Also zahlte die erste Brigade genau 9 Mark für die Bälle. Wegen $15 - 9 = 6$ zahlte sie für die drei Bücher genau 6 Mark, also kostete ein Buch genau 2 Mark.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230613:



Die Abbildungen (a) bis (g) zeigen je eine Möglichkeit für die zu konstruierenden Quadrate.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230614:

Um in kürzester Zeit zum Ziel zu kommen, sind 13 Minuten ausreichend. Ee gibt insgesamt genau vier verschiedene Wege, bei denen 13 Minuten ausreichend sind, nämlich

$$EAFGLKOPZ,\ EAFGLMZ,\ EAFGLPZ,\ EDJNOPZ.$$

Als Lösung zu a) gilt die Angabe eines dieser Wege, als Lösung zu b) die Angabe zweier weiterer.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

23. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 230621:

a) Wegen $2\,200 \cdot 25 : 4 = 13\,750$, $600 \cdot 24 : 2 = 7\,200$, $800 \cdot 12 \cdot 1 = 9\,600$ und $13\,750 + 7\,200 + 9\,600 = 30\,550$ sollen insgesamt 30 550 Liter Milch ausgeliefert werden.

b) Wegen $30\,550 : 9\,000 = 3$ Rest $3\,550$ waren für den Abtransport der 30 550 Liter Milch vier Tankwagen ausreichend, aber nicht weniger. Also ist 4 die gesuchte kleinstmögliche Anzahl.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230622:

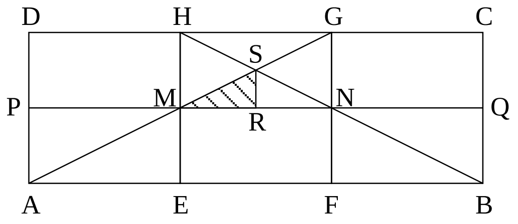
Wegen $48 : 3 = 16$ beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten. Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q. Der Abbildung dann zu entnehmen:

Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten. Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.

b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks MNS. Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.



Hinweis auf 2. Lösungsweg: Sei R der Mittelpunkt von MN. Dann hat Dreieck MRS den Inhalt von 1 Flächeneinheit. Durch weitere Hilfslinien lassen sich alle vorkommenden Teilflächen in solche Teildreiecke zerlegen. Die gesuchten Inhalte lassen sich dann durch Auszählen finden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230623:

Wegen (1) heißt Hausmann weder Christian noch Bernd. Wegen (2) heißt er auch nicht Alfred. Daraus folgt:

(3) Hausmann hat den Vornamen Detlef.

Wegen (2) heißt Giebler weder Alfred noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

(4) Giebler hat den Vornamen Christian.

Wegen (1) heißt Erdbach weder Christian noch Bernd und wegen (3) auch nicht Detlef. Daraus folgt:

(5) Erdbach hat den Vornamen Alfred.

Wegen (3), (4) und (5) bleibt für Freimuth nur der Vorname Bernd. Die zusammengehörenden Namen sind mithin:

Alfred Erdbach, Bernd Freimuth, Christian Giebler und Detlef Hausmann.

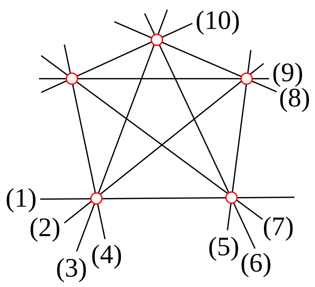
Anmerkung:

1. Es gibt zahlreiche andere Lösungswege. Man kann z.B. den Familiennamen Freimuth für Bernd direkt aus (1) und (2) folgern.
2. Wird eine Lösung mittels einer Tabelle gefunden, dann muß ersichtlich sein, aufgrund welcher Angaben gewisse Felder der Tabelle nicht belegt werden dürfen.

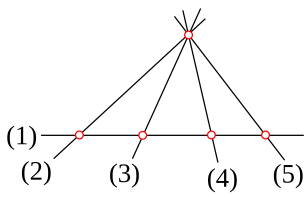
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 230624:

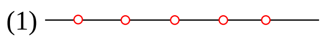
a) Folgende Beispiele zeigen, daß alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden

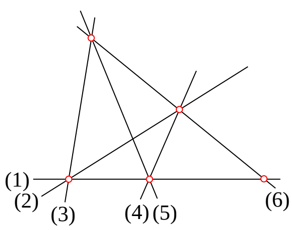


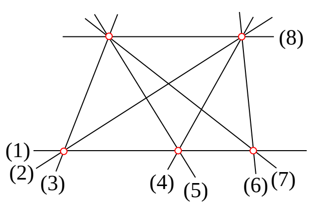
5 Verbindungsgeraden



1 Verbindungegerade

b) Folgende beiden Beispiele zeigen, daß die fünf Punkte auch so liegen können, daß es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:





Hinweis: Der Nachweis, daß hiermit alle Möglichkeiten erfaßt sind, wird vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

24. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 240611:

Werden x Bücher zu je 6 M und y Bücher zu je 4 M gekauft, so gilt

$$6x + 4y = 30. \tag{1}$$

Wegen $y \geq 1$ folgt hieraus $6x \leq 26$, also muß $x < 5$ sein. Daher und wegen $x \geq 1$ gibt es für x nur die Möglichkeiten der folgenden Tabelle. Von diesen scheiden diejenigen aus, bei denen die Zahl $30 - 6x$ nicht durch 4 teilbar ist, da aus (1) folgt, daß $4y = 30 - 6x$ gelten muß. Bei den übrigen Werten von x ergeben sich aus dieser Gleichung die angegebenen Werte für y.

x	$6x$	$30 - 6x = 4y$	y
1	6	24	6
2	12	18	-
3	18	12	3
4	24	6	-

Daher können nur die folgenden Anzahlen den Bedingungen der Aufgabe entsprechen:

Es werden

entweder 1 Buch zu 6 M und 6 Bücher zu 4 M
oder 3 Bücher zu 6 M und 3 Bücher zu 4 M

gekauft.

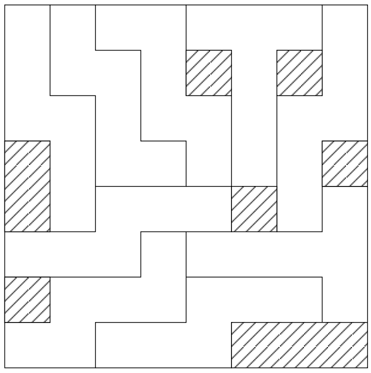
Beide Anzahlangaben erfüllen die Bedingungen (1) und $x \geq 1$, $y \geq 1$. Daher sind hiermit alle gesuchten Möglichkeiten genannt.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)

Lösung 240612:

(1) Genau die Bilder a), c) und e) sind Würfelnetze.

(2) Eine mögliche Anordnung von neun Würfelnetzen der geforderten Art zeigt die Abbildung. Zehn Felder des Gitternetzes werden nicht benötigt.



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)

Lösung 240613:

Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1\,600\,\text{cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400\,\text{cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64\,\text{cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel. Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels[1)], also

$$A_D = a_1^2 = 400\,\text{cm}^2.$$

Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor[1)]. Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2\,464\,\text{cm}^2.$$

[1)] Es wird akzeptiert, diese Feststellungen der Anschauung zu entnehmen.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)

Lösung 240614:

(a) Wegen 111 111 111 : 9 = 12 345 679 ist $z = 12\,345\,679$ die Zahl, die mit 9 multipliziert 111 111 111 ergibt.

(b) Aus

$$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$$

folgt

$$12\,345\,679 \cdot 72 = 888\,888\,888 \tag{1}$$

Daher hat beispielsweise die Zahl $x = 72$ die verlangte Eigenschaft, daß die Zahl $z \cdot x$ mit lauter Ziffern 8 geschrieben wird.

(c) Aus (1) folgt[1)]

$$12\,345\,679 \cdot 72 \cdot 1\,000\,000\,001 = 888\,888\,888 \cdot 1\,000\,000\,001, \tag{2}$$

d.h.

$$12\,345\,679 \cdot 72\,000\,000\,072 = 888\,888\,888\,888\,888\,888. \tag{3}$$

Also hat (beispielsweise) auch die Zahl 72 000 000 072 die verlangte Eigenschaft.

[1)] Man kann auch (2) durch unmittelbares Ausrechnen gewinnen, ohne (1) heranzuziehen (ähnlich auch (1) ohne Zurückführung auf (a)).

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (31)

24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 240621:

Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in der Abbildung a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes gegenüber; damit verbleibt für ihn nach der Abbildung a nur der Platz rechts neben Ines. Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in der Abbildung a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester. Da sie nach (4) auch nichts Steffens Schwester ist, muß

Kerstin Michaels Schwester (*)

sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm. Wie Abbildung a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Abbildung b).

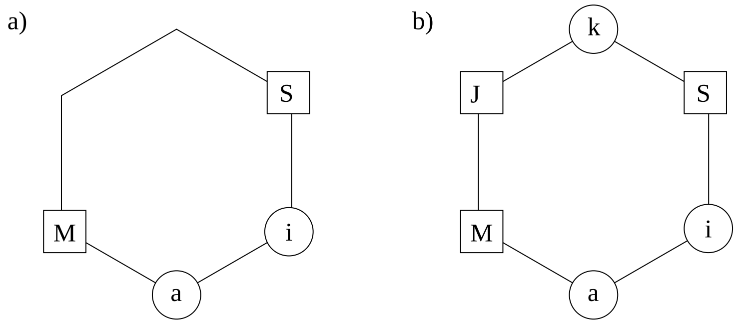
Weiter folgt aus Abbildung a) oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist

Ines Jörgs Schwester, (**)

und als drittes zusammengehörendes Geschwisterpaar verbleiben

Agnes und Steffen. (***)

Damit ist bewiesen, daß man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung b) angegeben.



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 240622:

Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6
Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22
Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24

Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 240623:

Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:

Rainer fährt wegen $6 \cdot 9 = 54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6 \cdot 8 = 48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6 \cdot 6 = 36$ in einer Stunde 36 km.

Somit betragen nach einer Stunde wegen $54 - 48 = 6$ bzw. $54 - 36 = 18$ bzw. $48 - 36 = 12$ die Weglängen

zwischen Rainer und Jürgen 6 km,
zwischen Rainer und Frank 18 km,
zwischen Jürgen und Frank 12 km.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 240624:

Ist k, w bzw. p das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), daß jede Kugel das Gewicht k und jeder Würfel das Gewicht w hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

$$p + 5w = 14k \tag{5}$$
$$w + 8k = p. \tag{6}$$

Wegen (6) besagt (5)

$$\begin{aligned} w + 8k + 5w &= 14k, \text{ also} \\ 6w &= 6k \text{ und folglich} \\ w &= k. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich aus (6)

$$9k = p.$$

Damit ist bewiesen, dass man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

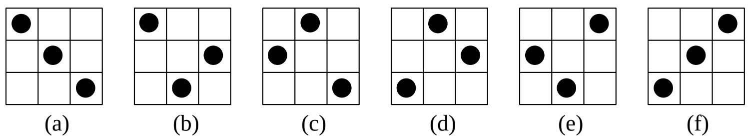
Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250611:

a) Es gibt genau folgende sechs Stellungen der geforderten Art:



b) Da in Stellung (a) das Mittelfeld besetzt ist, in Stellung (b) dagegen nicht, kann es keine Drehung um das Mittelfeld geben, bei der eine dieser beiden Stellungen aus der anderen hervorgeht.

Die Stellung (c), (d) bzw. (e) geht aus der Stellung (b) durch Drehung um 180°, 90° bzw. 270° um das Mittelfeld hervor.

Die Stellung (f) geht aus der Stellung (a) durch Drehung um 180° um das Mittelfeld hervor.

Folglich gibt es genau zwei verschiedenartige Stellungen (nämlich die Stellungen (a) und (b)).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 250612:

a) Wenn eine Eintragung alle Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:

Wegen (2) und (3) ist sowohl m als auch a durch 3 teilbar, wobei a zwei Drittel von m beträgt. Folglich ist m sogar durch 9 teilbar. Da m als Anfangsziffer nicht 0 ist, gilt somit $m = 9$. Wegen (2) und (3) folgt hieraus $a = 6$ und $e = 4$. Wegen (4) gilt dann $6 + s = 9$, also $s = 3$. Offensichtlich gilt $k = 1$ und $l = 0$ (da die Summe kleiner als $96\,994 + 9\,969 + 99 + 694 = 107\,756$ ist). Unter Beachtung von (1) erhält man daher:

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & 6 & \mathrm{t} & \mathrm{h} & 4 \\ + & & 9 & 0 & 6 & 9 \\ + & & & & \mathrm{t} & \mathrm{i} \\ + & & & 6 & \mathrm{d} & 4 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

Nur für $i = 7$ endet die Summe der Einerziffern auf 4, wobei ein Übertrag von 2 entsteht.

Für h, t und d bleiben noch die Ziffern 2, 5 und 8, deren Summe 15 beträgt, so daß die Summe aus den

Zehnerziffern und dem Übertrag 2 insgesamt 23 ergibt. Unter Beachtung des sich aus 23 ergebenden neuen Übertrags folgt aus der Summe der Hunderterziffern, daß $t = 5$ gilt. Damit ist entweder $d = 2$ und $h = 8$ oder $d = 8$ und $h = 2$. (*)

Wegen (5) entfällt der letztgenannte Fall. Folglich kann nur die Eintragung

$$\begin{array}{rr} & 96524 \\ + & 9069 \\ + & 57 \\ + & 684 \\ \hline & 106334 \end{array}$$

alle Forderungen der Aufgaben erfüllen. Da man für diese Eintragung in der Tat alle Forderungen bestätigt, ist damit bewiesen, daß es genau diese eine Eintragung der geforderten Art gibt.

b) Verzichtet man auf die Forderung (5), dann können beide in (*) genannten Fälle eintreten, und es gibt genau zwei Lösungen des Kryptogramms.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 250613:

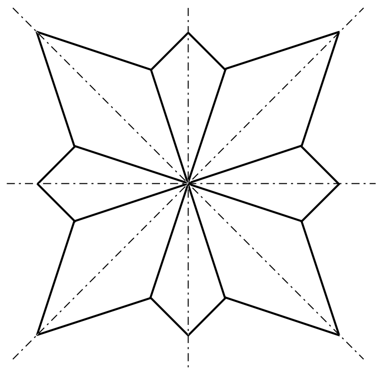
Jörg hat weniger als (die von Dirk gebrachten) 32 kg abgeliefert. Wegen $50 - 32 = 18$ hat er aber mehr als 18 kg abgeliefert. Hätte er drei oder weniger Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $3 \cdot 5 + 3 = 18$ nur 18 kg oder weniger geliefert. Hätte er sechs oder mehr Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $6 \cdot 5 + 3 = 33$ mehr als 32 kg geliefert. Also kann er nur vier oder fünf Bündel zu 5 kg gebracht haben.

Diese beiden Fälle sind in der Tat möglich, da sie auf $4 \cdot 5 + 3 = 23$ bzw. $5 \cdot 5 + 3 = 28$ führen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 250614:

Die Überprüfung ergibt, daß das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.



a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250621:

	a	b	c
3	●	●	
2		●	●
1	●		●

	a	b	c
3	●		●
2	●	●	
1		●	●

	a	b	c
3		●	●
2	●	●	
1	●		●

	a	b	c
3	●	●	
2	●		●
1		●	●

	a	b	c
3	●		●
2		●	●
1	●	●	

	a	b	c
3		●	●
2	●		●
1	●	●	

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250622:

I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist

$e - 4$ die erste Zahl,
$e - 3$ die zweite Zahl,
$e + 2$ die dritte Zahl,
$e + 1$ die vierte Zahl.

Nach (1) gilt daher

$$\begin{aligned} e - 4 + e - 3 + e + 2 + e + 1 &= 60, \\ 4e - 4 &= 60, \\ 4e &= 64, \\ e &= 16; \end{aligned}$$

also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt $12 + 13 + 18 + 17 = 60$, also ist (1) erfüllt, und es gilt

$$12 + 4 = 16, \qquad 13 + 3 = 16, \qquad 18 - 2 = 16, \qquad 17 - 1 = 16,$$

also ist (2) erfüllt.

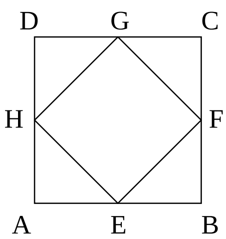
Anderer Lösungsweg:

I. Addiert man anstelle von vier Zahlen, die die geforderten Eigenschaften haben, die vier in (2) a) bis d) genannten Ergebnisse, so erhält man wegen $4 + 3 - 2 - 1 = 4$ eine um 4 größere Summe als 60, d. h. die Summe 64. Weil nach (2) diese vier Ergebnisse einander gleich sind, betragen sie $64 : 4 = 16$. Daher sind die gesuchten Zahlen 12, 13, 18 und 17.

II. Wie oben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250623:

a) 

b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$.

Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt $196\,\text{cm}^2$.

Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt $98\,\text{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250624:

a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Außerdem ist ersichtlich, daß jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und daß für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geq 3 \geq 1$ bzw. $3 \geq 2 \geq 2$ gilt.

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade.

Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müßte als Anke.

Also muß Anke genau 3 volle Flaschen erhalten. Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, daß von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte ”voll” der obigen Tabellen).

Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wieviel leere Flaschen es bekommen muß, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte ”leer”).

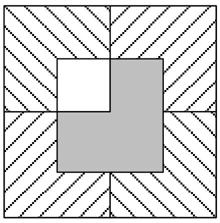
Damit ist gezeigt, daß nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260611:



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte $64\,\text{cm}^2$ bzw. $4\,\text{cm}^2$. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen $64 - 4 = 60$ den Flächeninhalt $60\,\text{cm}^2$.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 260612:

a) Unter den 15 in (8) genannten Teilnehmern ohne Rot- und Grünstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten Teilnehmer (ohne Rot- und Grünstift, aber) mit Kugelschreiber; die anderen 10 hatten folglich überhaupt kein Schreibgerät.

   Aus (8) und (1) folgt ferner: Alle 85 in (8) nicht genannten Teilnehmer hatten ein Schreibgerät (nämlich mindestens eines der Geräte Rot- oder Grünstift). Also hatten nur die genannten 10 Teilnehmer kein Schreibgerät.

   Damit ist gezeigt: Genau 90 der Teilnehmer hatten wenigstens ein Schreibgerät mitgebracht.

b) Unter den 20 in (2) genannten sämtlichen Teilnehmern mit Kugelschreiber, aber ohne Rotstift befanden sich auch die 5 in (4) genannten (mit Kugelschreiber, ohne Rotstift und) ohne Grünstift; die anderen 15 hatten folglich außer dem Kugelschreiber einen Grünstift mitgebracht. Daraus folgt:

   Die mitgebrachten Schreibgeräte reichten aus, um alle Teilnehmer zu versorgen. Es genügte z.B., 10 der genannten Grünstifte an die in a) ermittelten Teilnehmer ohne mitgebrachtes Schreibgerät zu verteilen.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgaben a) und b) wurden nicht alle Angaben (1) bis (8) benötigt. Derartige Aufgaben, bei denen mehr Forderungen gestellt werden, als zum Auffinden der Lösung nötig wären, heißen "überbestimmt". Man kann dann untersuchen, ob aus den gegebenen Forderungen noch mehr Zahlen ermittelt werden können; zu prüfen ist auch, ob sämtliche gestellten Forderungen überhaupt miteinander vereinbar sind.

Versuche z.B., aus den Angaben (1) bis (8) folgende Zahlen zu ermitteln:

Genau 5 der Teilnehmer hatten Kugelschreiber, Rot- und Grünstift.
Genau 10 der Teilnehmer hatten Kugelschreiber und Rotstift, aber keinen Grünstift.

Genau 15 der Teilnehmer hatten Kugelschreiber und Grünstift, aber keinen Rotstift.
Genau 15 der Teilnehmer hatten Rot- und Grünstift, aber keinen Kugelschreiber.
Genau 15 der Teilnehmer hatten einen Rotstift, aber weder Kugelschreiber noch Grünstift.
Genau 25 der Teilnehmer hatten einen Grünstift, aber weder Kugelschreiber noch Rotstift.

Überprüfe, ob durch diese und die in a) und b) gefundenen Ergebnisse tatsächlich alle Aussagen (1) bis (8) erfüllt werden! Suche selbst weitere Zahlen, z.B.: Wieviel Schreibgeräte hatten die Teilnehmer insgesamt mitgebracht?

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 260613:

a) Wegen $\overline{AB} + \overline{BC} = 25\,\text{km}$ und $\overline{AC} + \overline{BC} = 27\,\text{km}$ ist $\overline{AC}$ um 2 km länger als $\overline{AB}$. Damit ist wegen $\overline{CD} = \overline{BD}$ eine Wanderung von A über C nach D um 2 km länger als eine Wanderung von A über B nach D.

   Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort B.

b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dam kürzeren Wege von A nach D gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von A nach D auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

c) Würde man hintereinander von A über B nach C, dann von C über A nach B und dann von B über C nach A laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks ABC durchlaufen und wegen $25+28+27 = 80$ insgesamt 80 km zurücklegen. Folglich ist wegen $80 : 2 = 40$ der Umfang des Dreiecks ABC gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $\overline{AC} + \overline{BC} = 27\,\text{km}$, so verbleibt

$$\overline{AB} = 40\,\text{km} - 27\,\text{km} = 13\,\text{km}.$$

   Subtrahiert man vom Umfang aber $\overline{AC} + \overline{AB} = 28\,\text{km}$, so verbleibt

$$\overline{BC} = 40\,\text{km} - 28\,\text{km} = 12\,\text{km}.$$

   Daher ist

$$\overline{BD} = 12\,\text{km} : 2 = 6\,\text{km}.$$

   Der gesuchte Weg beträgt folglich

$$\overline{AB} + \overline{BD} = 13\,\text{km} + 6\,\text{km} = 19\,\text{km}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 260614:
Spieler B kann die Axialsymmetrie der Figur ausnutzen.

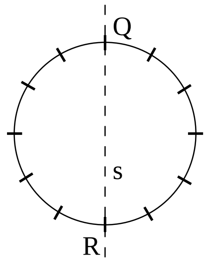
Für den ersten Zug von Spieler A sind genau die folgenden zwei Fälle möglicht

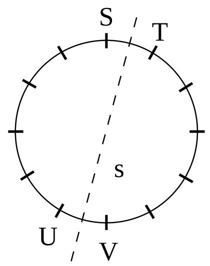
1. Spieler A nimmt nur einen Stein weg, wir bezeichnen ihn mit Q. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die durch Q geht. Auf s liegt noch ein Stein R. Diesen nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

2. Spieler A nimmt zwei nebeneinanderliegende Steine S und T weg. Dann wählt Spieler B als Symmetrieachse s der Figur diejenige Symmetrieachse, die zwischen S und T verläuft. Die Gerade s verläuft dann noch zwischen zwei weiteren nebeneinanderliegenden Steinen U und V. Diese nimmt Spieler B in seinem ersten Zug weg.

Nach dem ersten Zug von Spieler B liegen zwei zueinander bezüglich s symmetrische Steine niemals nebeneinander, sondern sind durch mindestens einen Punkt ohne Spielstein voneinander getrennt. Daher kann Spieler A niemals in einem Zug gleichzeitig einen Stein P und den zu ihm bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein P' wegnehmen.

Folglich wird Spieler B in jedem Fall zum Wegnehmen des letzten Steines, also zum Gewinn, kommen, wenn er zu jedem Stein, den Spieler A wegnimmt, im Gegenzug den bezüglich s symmetrisch gelegenen Stein wegnimmt.





Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260621:

Durch Einfügen zweier Ziffern anstelle der Sternchen entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern 2 oder 11 beträgt. Folglich ergibt sich genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn die beiden Sternchen in dieser Reihenfolge durch die Ziffern

0,2	bzw. 2,9
bzw. 1,1	bzw. 3,8
bzw. 2,0	bzw. 4,7
	bzw. 5,6
	bzw. 7,4
	bzw. 8,3
	bzw. 9,2

ersetzt werden.

Die gesuchten Zahlen lauten mithin

27027, 27117, 27207, 27297, 27387, 27477, 27567, 27657, 27747, 27837 und 27927.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260622:

Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem welche von den drei Antworten wahr ist:

1. Angenommen, die Antwort (1) wäre wahr, die Antworten (2) und (3) wären also falsch. Dieser Fall kann nicht eintreten, weil sich dann nämlich Britta und Petra beide den Ball wünschen würden.

2. Angenommen, die Antwort (2) wäre wahr und die Antworten (1) und (3) wären falsch. Dieser Fall kann nicht eintraten; denn dann würden sich weder Petra noch Britta den Ball wünschen, aber auch Anja nicht (da sie sich das Album wünschen würde.) Also muß der folgende Fall zutreffen:

3. Die Antwort (3) ist wahr und die Antworten (1) und (2) sind falsch.

   Daß (2) falsch ist, besagt:

   Petra wünscht sich den Ball

   (in Übereinstimmung damit, daß auch (1) falsch ist). Anja wünscht sich also nicht den Ball; und daß (3) wahr ist, bedeutet folglich nunmehr eindeutig:

Anja wünscht sich die Puppe,
Britta wünscht sich das Album (letzteres ebenfalls in Übereinstimmung damit, daß (1) falsch ist).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260623:

a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung; eine Beschreibung wird vom Schüler nicht verlangt):

Wir zeichnen um A und um B je einen Kreis mit dem gleichen Radius r, der größer als $\frac{1}{2}\overline{AB}$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $\overline{S_1A} = \overline{S_1B}$ und $\overline{S_2A} = \overline{S_2B}$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte A und C zwei Punkte S_3, und S_4, für die $\overline{S_3A} = \overline{S_3C}$ und $\overline{S_4A} = \overline{S_4C}$ gilt. Der Schnittpunkt S der Geraden durch S_1, S_2 und der Geraden durch S_3, S_4 erfüllt die geforderten Bedingungen.

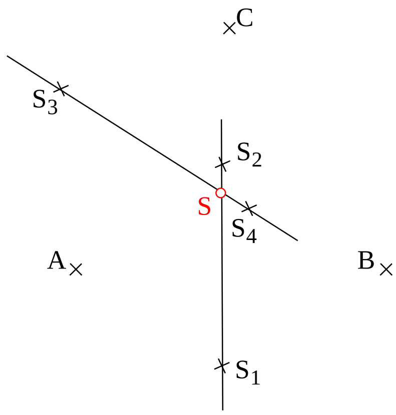
c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch S_1, S_2 Symmetrieachse zu A, B, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von B entfernt sind.

Ferner ist die Gerade durch S_3, S_4 Symmetrieachse zu A, C, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von C entfernt sind.

Nach Konstruktion ist S ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn:

$$\overline{SA} = \overline{SB} \text{ und } \overline{SA} = \overline{SC}$$

und damit auch $\overline{SB} = \overline{SC}$, d. h., S ist von A, B und C gleich weit entfernt.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260624:

Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen $20 - 8 = 12$ müßte es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.

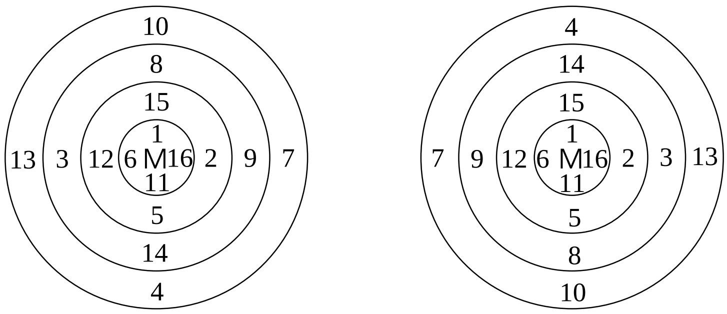
Aufgrund der Gesamtzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen $4 - 2 = 2$ müßte es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben. Es wird nun ausgesagt, daß genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist. Also folgt aus den Angaben, daß es außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in der Klasse geben müßte. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, $13 + 16 = 29$ ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

27. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 270611:
Die Abbildung zeigt zwei Möglichkeiten:



Hinweis: Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man nachweisen, daß dies die einzigen Möglichkeiten sind, abgesehen von einer Drehung der gesamten Figur um einen beliebigen Winkel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 270612:
Es gibt die folgenden Eintragungen, von denen laut Aufgabenstellung mindestens zwei anzugeben sind:

1	3	5	2
4	1	3	5
2	4	1	3
5	2	4	1

1	3	5	2
4	1	3	5
2	5	1	3
5	2	4	1

1	4	2	5
3	1	4	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
3	1	5	2
5	3	1	4
2	5	3	1

1	4	2	5
4	1	5	2
2	5	1	4
5	2	4	1

1	4	2	5
5	1	4	2
2	5	1	4
4	2	5	1

1	5	2	4
4	1	5	2
2	4	1	5
5	2	4	1

1	5	2	4
5	1	4	2
2	4	1	5
4	2	5	1

Hinweis: wie man durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle nachprüfen kann, gibt es keine weiteren Eintragungen der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 270613:
Die Reihenfolge lautet:

Frank, Andreas, Stefan, Dirk, Jürgen, Peter, Michael.

Probe:

zu (1): Frank ist schwerer als Andreas und als Dirk.
zu (2): Andreas ist schwerer als Stefan, und dieser ist schwerer als Dirk.
zu (3): Jürgen ist schwerer als Peter, und dieser ist schwerer als Michael.
zu (4): Dirk ist schwerer als Jürgen.

Hinweis: Man kann auch nachweisen, daß die Reihenfolge der Jungen eindeutig aus den Angaben (1) bis (4) folgt. Den Nachweis kann man so schreiben, daß die Jungen mit den Anfangsbuchstaben ihres Vornamens bezeichnet werden und daß $x > y$ bedeutet: x ist schwerer als y.

Aus (1) folgt nämlich	$A < F$, $A > D$.	
Aus (2) folgt	$S < A$, $S > D$	$\Rightarrow F > A > S > D$.
Aus (3) folgt	$P < J$, $P > M$.	
Aus (4) folgt	$J < D$	$\Rightarrow D > J > P > M$.

Damit ergibt sich $F > A > S > D > J > P > M$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 270614:

(1) Die Anzahl ist a) 4, b) 8, c) 16.

(2) Als weitere Anzahlen nach dem fünften, sechsten, ... Schnitt u.s.w. treten auf: 32, 64, 128, 256, ... und dann noch größere Anzahlen (nämlich jeweils das Doppelte der vorangehenden Anzahl). Daher kommt unter den auftretenden Anzahlen die Zahl 160 nicht vor.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

27. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 270621:

(a) Nach Stefans Aussage wurde Michael Dritter. Jens muß gewonnen haben; denn andernfalls ergäbe sich aus Horsts Vorhersage die falsche Aussage, daß Michael gewonnen hätte.

Also wurde Jens Erster und Peter Zweiter.

(b) Da Franks Aussage falsch war, hat Michael gewonnen. Deshalb, und weil Norberts Aussage falsch war, kann Jens nicht Zweiter geworden sein; folglich wurde er Dritter und Peter Zweiter.

Anderer Lösungsweg: Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten für den ersten, zweiten und dritten Platz. Bei jeder Möglichkeit ist angegeben, welche Vorhersage wahr und welche falsch ist.

Platz			Aussage			
1	2	3	F	H	N	S
J	M	P	W	W	W	F
J	P	M	W	W	W	W
M	J	P	F	W	W	F
M	P	J	F	W	F	F
P	J	M	W	F	W	W
P	M	J	W	F	W	F

(a) Die einzige Platzverteilung, bei der alle vier Vorhersagen wahr sind, ist demnach:

1. Jens, 2. Peter, 3. Michael.

(b) Die einzige Platzverteilung, bei der Horsts Vorhersage wahr ist und die anderen falsch sind, ist:

1. Michael, 2. Peter, 3. Jens.

Hinweise zur Korrektur:

1. Bei einem Vorgehen wie im ersten Lösungsweg ist eine Probe (Überprüfung, ob in (a) alle vier Aussagen wahr sind, in (b) genauso Horsts Aussage wahr ist) zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da die Existenz von Platzverteilungen mit diesen Wahrheitswerten dem Aufgabentext entnommen werden kann.
2. Im zweiten Lösungsweg ist auf den - für Schüler oft ungewohnten Sachverhalt zu achten, daß eine Aussage "Wenn A, dann B" *nur* dann falsch ist, wenn A wahr *und* B falsch ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 270622:

(a) Die Spiele (bezeichnet durch Hintereinanderschreiben der Buchstaben) sind AB, AC, AD, BC, BD, CD.

(b) Kommt noch eine fünfte Mannschaft E hinzu, so ergeben sich außer diesen sechs Spielen noch weitere vier (AE, BE, CE, DE), insgesamt also zehn Spiele.

Kommt eine sechste Mannschaft hinzu, so ergeben sich zusätzlich genau die fünf weiteren Spiele, die sie mit A, B, C, D, E auszutragen hat, insgesamt also 15 Spiele.

Eine siebente Mannschaft hat genau sechs weitere Spiele (nämlich die mit den bisher genannten sechs Mannschaften) auszutragen.

Damit ist gezeigt, daß bei sieben Mannschaften genau 21 Spiele zustandekommen.

Hinweis zur Korrektur: Ein Nachweis, daß 7 die einzige Anzahl ist, die zu (b) anzugeben ist, wird vom Schüler nicht verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 270623:

(a) Anzugeben ist eine Uhrzeit zwischen 3.45 Uhr und 3.50 Uhr sowie eine Uhrzeit zwischen 9.15 Uhr und 9.20 Uhr.

Zur Überprüfung beider Angaben ist die Gleichheit der Summen

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39,$$
$$10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 = 39$$

zu bestätigen.

(b) Die Summe aller zwölf Zahlen des Zifferblattes beträgt 78. Gäbe es eine Uhrzeit der genannten Art, so müßte wegen $78 : 3 = 26$ in jedem der Teile die Summe 26 stehen. Daß dies nicht möglich ist, kann z.B. folgendermaßen gezeigt werden:

Die Zahl 10 kann nicht als erster Summand auftreten, da $10 + 11 < 26$ und bereits $10 + 11 + 12 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als erstem Summanden erst recht größer als 26 sind.

Die Zahl 10 kann nicht als zweiter Summand auftreten, da $9 + 10 < 26$ und bereits $9 + 10 + 11 > 26$ ist, also alle weiteren Summen mit 10 als zweitem Summanden erst recht größer als 26 sind.

Die Zahl 10 kann aber auch nicht als dritter oder weiterer Summand auftreten, da bereits $8+9+10 > 26$ ist, also alle anderen Summen, in denen 10 als dritter oder weiterer Summand auftritt, erst recht größer als 26 sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 270624:

Die Zeitpunkte, zu denen Werkstücke fertig werden, sind die folgenden Uhrzeiten:

Maschine	Uhrzeiten
A	12 24
B	8 16 24
C	3 6 9 12 15 18 21 24
D	2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24

Daraus ist ersichtlich:

Es kommt insgesamt

(a) genau einmal (nämlich um 24.00 Uhr)

(b) genau einmal (nämlich um 12.00 Uhr für A, C, D)

(c) genau viermal (nämlich um 6.00 Uhr und 18.00 Uhr für C, D sowie um 8.00 und 16.00 Uhr für B, D)

vor, daß auf (a) allen, (b) genau drei bzw. (c) genau zwei Maschinen zum gleichen Zeitpunkt ein Werkstück fertig wird.

Hinweise: Die Angabe der einzelnen Uhrzeiten und Maschinenkombinationen wird nicht vom Schüler verlangt; aus der Lösungsdarstellung des Schülers soll nur ersichtlich sein, wie er die anzugebenden Anzahlen (von Zeitpunkten) gefunden hat. Beispielsweise genügt es, in der obenstehenden Tabelle die zahlenmäßige Angabe der Uhrzeiten durch einheitliche Punkt- oder Strichsymbole zu ersetzen. Bei einer solchen Darstellung muß allerdings die unterschiedliche Verteilung der Zeitpunkte ersichtlich sein (auf die man bei zahlenmäßiger Wiedergabe verzichten könnte).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280611:

Die Zahl 2 431 hat folgende Eigenschaften:

Sie ist weder durch 2 noch durch 4 teilbar; denn sie ist ungerade. Sie ist nicht durch 3 und auch nicht durch 9 teilbar; denn ihre Quersumme $2 + 3 + 4 + 1 = 10$ ist weder durch 3 noch durch 9 teilbar. Sie ist nicht durch 5 teilbar; denn sie hat als letzte Ziffer weder die 0 noch die 5.

Daher kommt auf dem Bild nur ein Weg in Frage, der die Zahlen 2, 3, 4, 9 und 5 vermeidet. Es gibt genau einen solchen Weg, nämlich über 1, 11, 13, 17. Wegen $1 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 2\,431$ liefert er das geforderte Produkt. Also muß Bello genau diesen Weg wählen.

Andere Lösungsdarstellung: Wegen der Primfaktorzerlegung $2\,431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$ können auf einem gesuchten Weg außer der Zahl 1 nur die drei Primzahlen 11, 13 und 17 oder Produkte dieser Primzahlen vorkommen. Es gibt auf dem Bild genau einen solchen Weg, nämlich den über 1, 11, 13, 17 ... u.s.w. wie oben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 280612:

Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich

genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.

Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 280613:

Eine mögliche Verteilung lautet:

Tanja - 1. Platz; Mario - 2. Platz; Rigo - 3. Platz; Petra - 4. Platz.

Bei dieser Verteilung ist die Angabe (4) wahr. In (1) ist "Tanja erreicht den ersten Platz" wahr und "Petra den zweiten" falsch. In (2) ist "Tanja wird Zweite" falsch und "Rigo Dritter" wahr. In (3) ist "Mario belegt den zweiten Platz" wahr und "Rigo den vierten" falsch. Somit ist in den Meinungen (1) bis (3) jeweils genau eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch.

Bemerkung: Wenn man nachweisen will, daß keine andere Verteilung die Bedingungen der Aufgabe erfüllt (ein solcher Nachweis wurde nicht verlangt), so kann man folgendermaßen vorgehen:

Käme Tanja nicht auf den 1. Platz, so wäre in (1) die erste Aussage falsch, also die zweite wahr, d.h., Petra käme auf den 2. Platz. Daher wäre in (2) und (3) jeweils die erste Aussage falsch und somit die zweite wahr. Dann müßte Rigo aber sowohl auf den 3. als auch auf den 4. Platz kommen.

Da das nicht möglich ist, scheidet dieser Fall aus. Also kommt Tanja auf den 1. Platz. Daher ist in (2) die erste Aussage falsch, die zweite wahr, d.h., Rigo kommt auf den 3. Platz. Folglich ist in (3) die zweite Aussage falsch, die erste wahr, d.h., Mario kommt auf den 2. Platz, und für Petra verbleibt der 4. Platz.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 280614:

a) Alle möglichen Schrittfolgen für die vierstufige Treppe sind:

   1, 2, 3, 4;
   1, 2, 4;
   1. 3, 4;
   2, 3, 4;
   2, 4.

b) Alle möglichen Schrittfolgen für eine dreistufige Treppe sind:

   1, 2, 3;
   1. 3;
   2, 3.

   Alle möglichen Schrittfolgen für eine zweistufige Treppe sind:

   1, 2;
   2.

   Für eine einstufige Treppe gibt es genau die Schrittfolge

   1.

c) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer vierstufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe: $5 = 3 + 2$.

d) Die Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe ist gleich der Summe der Anzahlen der Schrittfolgen bei der zweistufigen und der einstufigen Treppe: $3 = 2 + 1$.

e) Um in der angegebenen Weise die vierstufige Treppe hinaufzugehen, kann man entweder mit dem ersten Schritt nur eine Stufe steigen und hat dann noch drei Stufen vor sich, oder man kann mit dem ersten Schritt zwei Stufen nehmen und hat dann nur noch zwei Stufen vor sich.

   Im ersten Fall ist die Anzahl der möglichen Fortsetzungen gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer dreistufigen Treppe, und im zweiten Fall ist sie gleich der Anzahl der Schrittfolgen bei einer zweistufigen Treppe. Folglich ist die Anzahl aller möglichen Schrittfolgen bei der vierstufigen Treppe gleich der Summe der Anzahlen möglicher Schrittfolgen bei der dreistufigen und der zweistufigen Treppe.

f) Entsprechend folgt: Die Gleichung $8 = 5 + 3$ führt zur Anzahl 8 der Schrittfolgen bei einer fünfstufigen Treppe; die Gleichung $13 = 8 + 5$ führt zur Anzahl 13 der Schrittfolgen bei einer sechsstufigen Treppe.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280621:

Von jedem der fünf Orte gibt es genau vier Bahnverbindungen. Da alle diese Bahnverbindungen verschieden sind und André zu jeder von ihnen genau eine Fahrkarte besitzt, hat er wegen $5 \cdot 4 = 20$ insgesamt 20 Fahrkarten.

Hinweis zur Korrektur: Wird die Lösung als Aufzählung (von Verbindungen) formuliert, so ist zur Wertung zu berücksichtigen, ob aus der Darstellung (z.B. der Systematik) hervorgeht, daß die Vollständigkeit und kein mehrfaches Vorkommen der Verbindungen erwiesen ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280622:

Frau Müller kauft Eintrittskarten für 3 Erwachsene und 5 Kinder. Weil Kinder nur halbe Preise zahlen, zahlt Frau Müller (wegen $3 \cdot 2 = 6$ und $6 + 5 = 11$) soviel an Eintritt, wie für 11 Kinder zu zahlen wäre. Hieraus folgt wegen $22 : 11 = 2$, daß für jedes Kind 2 Mark zu entrichten sind.

Wegen $2 \cdot 2 = 4$ kostet der Eintritt für einen Erwachsenen 4 Mark. Frau Beyer hat somit (wegen $1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$) an Frau Müller 8 Mark zu bezahlen, ebenso Frau Schulz.

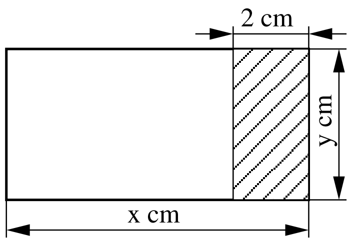
Anderer Lösungsweg: Wenn die Eintrittskarte für ein Kind x Mark kostet, so kostet sie für einen Erwachsenen $2 \cdot x$ Mark. Für 3 Erwachsene und 5 Kinder sind damit $(3 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot x)$ Mark zu bezahlen. Da dies 22 Mark sind, folgt

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \cdot x + 5 \cdot x &= 22, \\ 6 \cdot x + 5 \cdot x &= 22, \\ (6 + 5) \cdot x &= 22, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

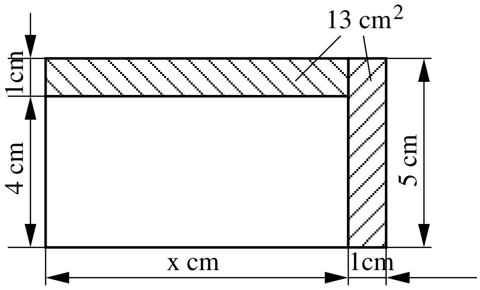
Also kostet die Karte für ein Kind 2 Mark. Fortsetzung wie oben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280623:



Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm^2 beträgt. Wegen $8 : 2 = 4$ beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.



Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen $4 + 1 = 5$) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm^2, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen $13 - 5 = 8$) dem Flächeninhalt 8 cm^2. Wegen $8 : 1 = 8$ beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.

Somit läßt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

Anderer Lösungsweg: Wenn im ersten Rechteck die größere Seitenlänge x cm und die kleinere Seitenlänge y cm beträgt, so folgt aus Rolfs erster Feststellung (siehe Abbildung a):

$$2 \text{ cm} \cdot y \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$$

Aus der damit gewonnenen Gleichung $2 \cdot y = 8$ folgt $y = 4$; die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks kann also eindeutig ermittelt werden, sie beträgt 4 cm.

Aus Rolfs zweiter Feststellung (siehe Abbildung b) folgt daher, und weil (wegen $4 + 1 = 5$) das dritte Rechteck die kleinere Seitenlänge 5 cm erhält,

$$x \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 13 \text{ cm}^2.$$

Aus der damit gewonnenen Gleichung

$$\begin{aligned} x \cdot 1 + 1 \cdot 5 &= 13 \text{ folgt} \\ x + 5 &= 13, \\ x &= 8; \end{aligned}$$

die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks kann also ebenfalls eindeutig ermittelt werden, sie beträgt 8 cm.

Hinweise zur Korrektur: Statt verbaler Figurenbeschreibungen wie im ersten Lösungsweg kann auch ein stärkeres Heranziehen von Abbildungen erfolgen, aus deren Beschriftung (wie oben) Terme für die Rechnung abgelesen werden. Derartige Abbildungen können auch als Prinzipskizzen angelegt sein; sie brauchen also nicht maßgerecht zu sein (die richtigen Maße werden ja erst mit ihrer Hilfe ermittelt).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280624:

Aus (1) und (3) folgt:

(5) Heidi erhielt Silber,

(6) Manuela erhielt Gold.

Wegen (5) folgt aus (2):

(7) Die Handballerin erhielt Silber.

Aus (4) und (7) folgt:

(8) Simone erhielt Gold.

In (5), (6) und (8) sind bereits drei Medaillenträgerinnen ermittelt; damit folgt aus (1):

(9) Peggy erhielt Silber.

Nach (5), (9) ist (2) auf Heidi und Peggy anzuwenden und ergibt:

(10) Heidi startete in Pop-Gymnastik,

(11) Peggy ist die Handballerin.

Nach (6), (8) ist (2) auf Manuela und Simone anzuwenden und ergibt:

(12) Manuela ist die Schwimmerin,

(13) Simone startete im Mehrkampf.

In (10), (11), (12), (13) ist damit für jedes der Mädchen die Sportart und in (5), (6), (8), (9) auch die Medaillenart eindeutig gefunden. Die Überprüfung ergibt:

(1) ist wegen (5), (6). (8), (9) erfüllt;

(2) ist hiernach und wegen (10), (11) für die Mädchen mit Silbermedaillen sowie wegen (12), (13) für die Mädchen mit Goldmedaillen erfüllt;

(3) ist wegen (5), (6) erfüllt;

(4) ist wegen (8). (11) und (9) erfüllt.

Hinweis zur Korrektur: Sowohl zur Herleitung der Sportarten und Medaillen als auch zur Überprüfung von (1) bis (4) soll die durchgeführte Überlegung aus der Darstellung (z.B. einer logisch möglichen und ausreichenden Reihenfolge der Teilangaben im Lösungstext) des Schülers ersichtlich sein. Eine (wie oben ausgeführte) weitergehende Angabe von Detailbegründungen kann damit entbehrlich werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290611:

Peter kann folgendermaßen verfahren:

Er entnimmt zuerst durch Füllen des kleinen Gefäßes mit anschließendem Umgießen in das große Gefäß dreimal je 5 Liter aus der Kanne. Wegen $3 \cdot 5 = 15$ enthält das große Gefäß dann genau 15 Liter; wegen $17 - 15 = 2$ passen noch genau 2 Liter Milch hinein. Diese werden aus dem noch einmal gefüllten kleinen Gefäß in das große Gefäß gegossen, so daß nun in dem kleinen Gefäß wegen $5 - 2 = 3$ noch genau 3 Liter sind.

Danach wird das große Gefäß wieder durch Zurückgießen in die Kanne entleert, und die 3 Liter werden anschließend in das große Gefäß gegossen. Gießt man nun noch zweimal je 5 Liter Milch hinzu, so enthält das große Gefäß wegen $3 + 2 \cdot 5 = 13$ genau 13 Liter Milch, wie es verlangt war.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 290612:

a), b), c) siehe Abbildungen a, b, c.

Hinweis: Der folgenden Tabelle kann man gemeinsame Eigenschaften der beiden Zahlen 12 und 75 entnehmen:

	Primfaktorzerlegung	Sämtliche Teiler					
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	1	2	3	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
75	$5 \cdot 5 \cdot 3$	1	5	3	$5 \cdot 5 = 25$	$5 \cdot 3 = 15$	$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$

Daher kommt man zu einer Lösung der Aufgabe c), indem man einfach die Zahlen aus der Lösung von a) durch die in der Tabelle darunterstehenden Zahlen ersetzt.

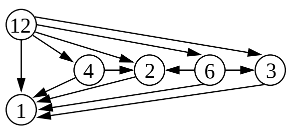


Abbildung a

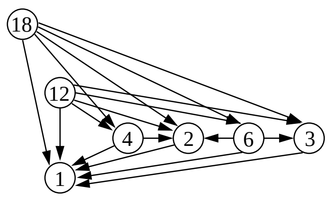


Abbildung b

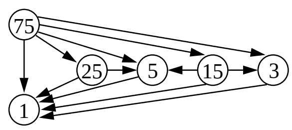


Abbildung c

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 290613:

Wegen $3,6\,\text{m} = 360\,\text{cm}$, $2,7\,\text{m} = 270\,\text{cm}$, $360 : 30 = 12$, $270 : 30 = 9$ und $12 \cdot 9 = 108$ läßt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen. Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen $108 : 2 = 54$ insgesamt je 54 Stück benötigt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 290614:
Aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen $25 - 20 = 5$:

Genau 5 Schüler der Klasse gehören nicht einer Sportgruppe an. Unter diesen müssen sich die 3 in der dritten Angabe des Aufgabentextes genannten Schüler befinden, die außerdem auch nicht der AG Mathematik angehören. Damit folgt wegen $5 - 3 = 2$ als Antwort zu a): Insgesamt 2 Schüler der Klasse gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an.

Diese 2 Schüler müssen zu den 12 in der zweiten Angabe des Aufgabentextes genannten Schülern gehören. Wegen $12 - 2 = 10$ folgt damit als Antwort zu c): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an.

Hieraus und aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen $20 - 10 = 10$ als Antwort zu b): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören zwar einer Sportgruppe an, aber nicht der AG Mathematik.

Hinweis: Zur Probe kann man die Anzahlen in das Diagramm Abbildung a eintragen und damit durch $10+10+2+3 = 25$, $10+10 = 20$, $10+2 = 12$ bestätigen, daß die Angaben des Aufgabentextes erfüllt sind.

Eine andere Lösungsdarstellung ergibt sich z.B., indem man sogleich ein Diagramm (Abbildung b) heranzieht, worin die Anzahlen a, b, c unbekannt sind. Die Angaben das Aufgabentextes lauten mit diesen Bezeichnungen

$$a + b + c + 3 = 25, \tag{1}$$
$$b + c = 20, \tag{2}$$
$$a + c = 12. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt $a = 2$; hieraus und aus (3) folgt $c = 10$; hieraus und aus (2) folgt $b = 10$.

Eine Probe ist (zwar zur Sicherheit vor Rechenfehlern nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da man dem Aufgabentext entnehmen kann, daß seine sämtlichen Angaben erfüllbar sind.

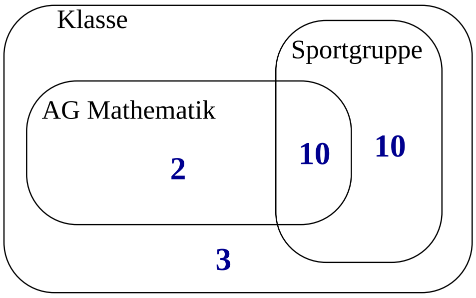


Abbildung a

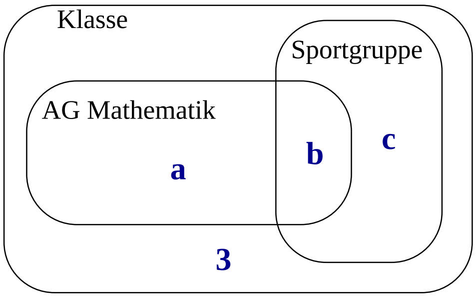


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290621:
Aus den Notizen folgt:

Nach (2) sind Martin und der Gewinner des zweiten Preises zwei Schüler, d.h., Martin gewann nicht den zweiten Preis. Nach (3) gewann auch Christian nicht den zweiten Preis. Also folgt aus (1):

(5) Den zweiten Preis gewann Alexander.

Nach (4) ist Martin nicht der Gewinner des ersten Preises. Hieraus und aus (5), (1) folgt:

(6) Den ersten Preis gewann Christian,

(7) den dritten Preis gewann Martin.

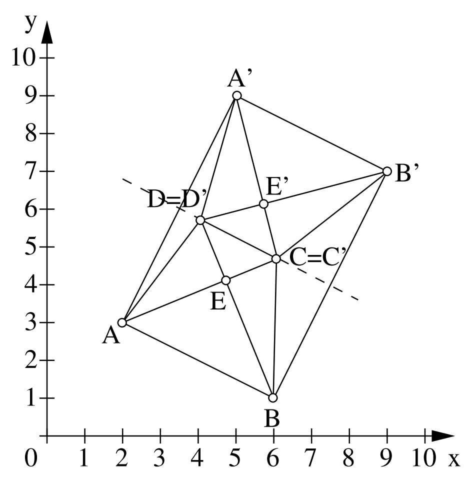
Damit ist gezeigt, daß sich diese Verteilung (5), (6), (7) eindeutig aus Janas Notizen ermitteln läßt.

Bemerkung: Eine Probe (Nachweis, daß die Verteilung (5), (6), (7) die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt) ist zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da man die Existenz einer Verteilung, die diese Bedingungen erfüllt, dem Aufgabentext entnehmen kann.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290622:

a) und b):



c) Ein möglicher Weg ist:

$D, A, B, E, D, C, E, A, A', D, E', B', C, E', A', B', B, C$

(Dieser Weg kann z.B. auch so beschrieben werden:

$D, A, B, D, C, A, A', D, B', C, A', B', B, C$.

Wegen $C = C'$ und $D = D'$ kann ferner in einer Beschreibung wahlweise C' bzw. D' statt C bzw. D stehen.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290623:

Für jede mögliche Größe von Rechtecken der genannten Art erhält man die in der folgenden Tabelle aufgeführten Angaben:

Rechtecke	Flächeninhalt	Anzahl der Rechtecke	Summe der Flächeninhalte
1 cm · 1 cm	$1\ cm^2$	9	$9\ cm^2$
1 cm · 2 cm	$2\ cm^2$	12	$24\ cm^2$
1 cm · 3 cm	$3\ cm^2$	6	$18\ cm^2$
2 cm · 2 cm	$4\ cm^2$	4	$16\ cm^2$
2 cm · 3 cm	$6\ cm^2$	4	$24\ cm^2$
3 cm · 3 cm	$9\ cm^2$	1	$9\ cm^2$
		36	$100\ cm^2$

Damit hat sich ergeben:

a) Die Anzahl der genannten Rechtecke beträgt 36.

b) Die Summe ihrer Flächeninhalte beträgt $100\ cm^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290624:

a) Ein Beispiel zeigt die Abbildung a.

b) Es gibt keine derartige Eintragung.

1. Beweismöglichkeit: Da es drei der gekennzeichneten Linien gibt, die die gesamte Figur überdecken, ohne ein Feld mehrmals zu erfassen, müßte bei einer Eintragung der geforderten Art das Dreifache der in jeder Linie zu erreichenden Summe gleich 28 sein; denn es gilt $1 + 2 + ... + 7 = 28$. Da aber 28 nicht durch 3 teilbar ist, ist das nicht möglich.

2. Beweismöglichkeit: Bei einer Eintragung der geforderten Art müßte beispielsweise $x + y = x + z$ für die in der Abbildung b angegebenen Zahlen x, y, z gelten. Das hätte aber $y = z$ zur Folge, im Widerspruch zu den Forderungen der Aufgabe.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Abbildung a

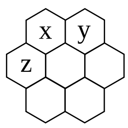


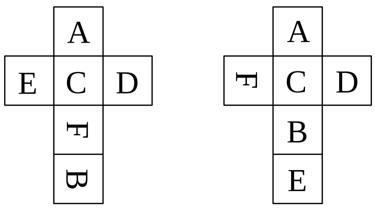
Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

30. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300611:



Die Abbildung zeigt zwei Ergänzungsmöglichkeiten der geforderten Art. Bei beiden muß als Grundfläche des unteren Würfels die als E beschriftete Fläche gewählt werden.

Bemerkung: Es gibt noch andere Möglichkeiten. Man kann sogar für jeden der Buchstaben A, C, D, E eine Beschriftung so finden, daß gerade die Fläche mit diesem Buchstaben als Grundfläche des unteren Würfels gewählt werden muß.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 300612:
Die folgende Tabelle enthält in der ersten Zeile genau alle in (a) gesuchten Zahlen. In der zweiten Zeile steht zu jeder dieser Zahlen ihre Quersumme. In der dritten Zeile steht jeweils die Antwort auf die Frage, ob die betreffende Zahl durch ihre Quersumme teilbar ist (j für ja, n für nein). Hiernach sind genau die Zahlen 40, 84 und 48 die in (b) gesuchten.

Zahl	40	51	15	62	26	73	37	84	48	95	59
Quersumme	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14
teilbar?	j	n	n	n	n	n	n	j	j	n	n

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 300613:
Antwort: 10 Bleistifte und 2 Hefte sind teurer als 11 Hefte und 2 Bleistifte.

Begründung: Ist b der Preis für einen Bleistift und h der Preis für ein Heft, so gilt nach Linas Feststellung

$$7b > 8h. \tag{1}$$

Daraus folgt erst recht
$$7b > 7h, \tag{2}$$

also
$$b > h. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) ergibt sich
$$8b > 9h. \tag{4}$$

Vergrößert man nun jeweils sowohl $8b$ als auch $9h$ um $2b + 2h$, so folgt $10b + 2h > 2b + 11h$, wie in der Antwort angegeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 300614:

a) Die Ziffer 4 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen

1 bis 10, 11 bis 20, ..., 221 bis 230, 231 bis 235

gebraucht, d.h. zusammen 24mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen

40, 41, ... 49, 140, 141, ... 149

gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d.h. zusammen 20mal. An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wurde die Ziffer 4 bei der Numerierung insgesamt 44mal verwendet.

b) Die Ziffer 0 wird in der Einerstelle jeweils genau einmal für die Zahlen

1 bis 10, 11 bis 20.....221 bis 230

gebraucht, aber nicht für die Zahlen 231 bis 235, d.h. zusammen 23mal.

An der Zehnerstelle wird sie jeweils genau einmal für die Zahlen

100, 101, ... 109, 200, 201, ... 209

gebraucht und für die anderen der Zahlen von 1 bis 235 nicht, d.h. zusammen 20mal. An der Hunderterstelle wird sie für die Zahlen von 1 bis 235 nicht gebraucht. Also wird die Ziffer 0 bei der Numerierung insgesamt 43mal verwendet.

c) Unter den Zahlen von 1 bis 235 gibt es genau die 9 einstelligen 1, 2, ... 9, genau die 90 zweistelligen 10, 11, ... 99 und genau die 136 dreistelligen 100, 101, ... 235. Daher sind bei der Numerierung insgesamt $9 + 90 \cdot 2 + 136 \cdot 3 = 9 + 180 + 408 = 597$ Ziffern zu drucken.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

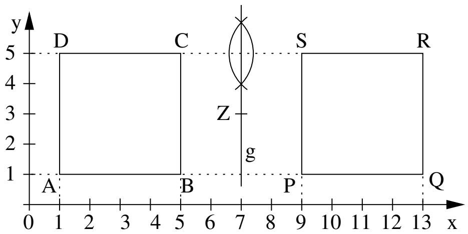
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300621:

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.

b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade g und eine Konstruktion dieser Geraden.

c) Das Drehzentrum ist Z(7;3), der Drehwinkel beträgt 180°.



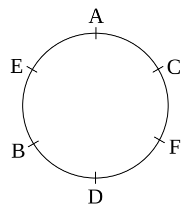
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

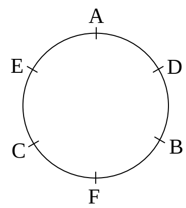
Lösung 300622:

a)

Person	Nachbarn in Abbildung a	Nachbarn in Abbildung b
A	F, B	D, C
B	A, C	E, F
C	B, C	A, E
D	C, E	F, A
E	C, F	C, B
F	E, A	B, D

b) Alle weiteren Möglichkeiten (bis auf Drehung und Spiegelung) zeigt Abbildung b.





Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300623:

Die Lettern reichen nicht aus. Zu einer Begründung kommt man, wenn man für die Lettern mit der Ziffer 6 die benötigte Stückzahl ermittelt (dies ist zweckmäßig, da für die 6 die kleinste verfügbare Stückzahl vorliegt)!

An der Einerstelle wird die Ziffer 6 jeweils einmal für die Zahlen

1 bis 10, 11 bis 20, ..., 1011 bis 1020

gebraucht, d.h. 102mal.

An der Zehnerstelle wird die Ziffer 6 jeweils 10mal für die Zahlen

60 bis 69, 160 bis 169, ..., 960 bis 969

gebraucht, d.h. 100mal.

An der Hunderterstelle wird die Ziffer 6 für die Zahlen

600, ..., 699

gebraucht, d.h. 100mal.

Es werden also 302 Lettern mit der Ziffer 6 gebraucht, während nur 300 zur Verfügung stehen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300624:

Die folgende Tabelle zeigt alle Werte $n = 5a + 7b$ mit $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $b = 0, 1, 2, 3, 4$

$b \backslash a$	0	1	2	3	4	5
0	0	5	10	15	20	25
1	7	12	17	22	27	32
2	14	19	24	29	34	39
3	21	26	31	36	41	46
4	28	33	38	43	48	53

Da bei weiterem Vergrößern von a oder b (oder beiden) stets jeweils auch n größer wird, ergibt sich:

(1) Unter allen natürlichen Zahlen $n \leq 24$ lassen sich genau die Zahlen

0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24

in der genannten Form darstellen. Ferner ist aus der Tabelle ersichtlich:

(2) Die Zahlen

24, 25, 26, 27, 28

lassen sich in der genannten Form darstellen. Indem man nun zu den in (2) genannten Zahlen der Reihe nach $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... u.s.w. addiert, erhält man:

(3) Auch die Zahlen

29, 30, 31, 32, 33,
34, 35, 36, 37, 38,
39, 40, 41, 42, 43,

lassen sich in der genannten Form darstellen.

Mit (2) und (3) ist gezeigt, daß jede natürliche Zahl $n \geq 24$ sich in dieser Form darstellen läßt. Die insgesamt gesuchten Zahlen sind also genau die in (1) genannten Zahlen und alle natürlichen Zahlen $n > 24$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310611:

Durch Aufzählen aller Darstellungen von 60 als Produkt zweier natürlicher Zahlen erhält man: Es gibt genau die folgenden Möglichkeiten für ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von je 1 cm Seitenlänge zerlegen läßt:

Seitenlängen in cm	Umfang in cm
1, 60	122
2, 30	64
3, 20	46
4, 14	38
5, 12	34
6, 10	32

Von diesen Umfängen ist genau einer doppelt so groß wie einer der anderen, nämlich 64 cm doppelt so groß wie 32 cm. Also hat Jans Rechteck die Seitenlängen 2 cm, 30 cm und Uwes Rechteck die Seitenlängen 6 cm, 10 cm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310612:

a) Wenn M der Drehpunkt einer Drehung ist, die A in A' überführt, so gilt

$$\overline{MA} = \overline{MA'}. \tag{1}$$

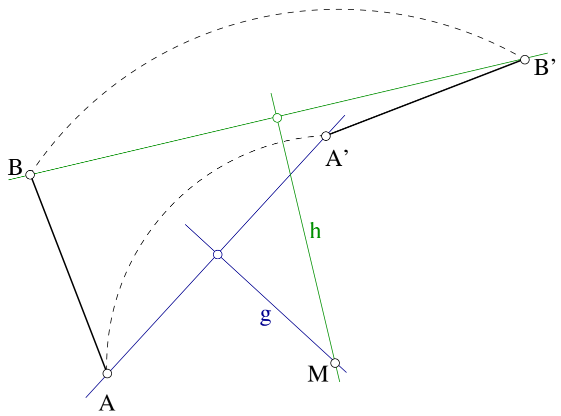
Daraus folgt, daß M auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen muß, da dies für alle Punkte M gilt, die (1) erfüllen.

Bemerkung: Dies kann als bekannte Eigenschaft der Mittelsenkrechten verwendet oder zuvor mit dem Kongruenzsatz sss für die Dreiecke AHM, $A'HM$ bewiesen werden, wo H der Mittelpunkt von AA' ist.

b) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

g und h sind die Mittelsenkrechten von AA' bzw. BB', ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt M.

Zur Kontrolle kann man überprüfen, daß im Kreis um M durch A die Radien MA, MA' einen gleichgroßen Winkel bilden wie MB, MB' im Kreis um M durch B.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310613:

Bezeichnen E, R, G, J die Anzahlen der Briefmarken von Elke, Regina, Gerd bzw. Joachim, so folgt aus den Angaben

$$J > G, \tag{1}$$
$$E + R = J + G, \tag{2}$$
$$E + J < R + G. \tag{3}$$

Vermehrt man von den beiden Zahlen $E + J$ und $R + G$ in (3) sowohl die kleinere als auch die größere um die in (2) auf beiden Seiten genannte Zahl, so folgt

$$2E + R + J < R + J + 2G.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn

$$E < G \tag{4}$$

gilt. Hiernach kann die Gleichung (2) nur gelten, wenn für die anderen darin auftretenden Summanden

$$R > J \tag{5}$$

gilt. Mit (5), (1), (4) ist gezeigt, daß die Angaben nur durch die Reihenfolge $R > J > G > E$ erfüllt werden können.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310614:

I. Nach (1) waren genau $20 - 5 = 15$ Teilnehmer älter als 30 Jahre. Von ihnen kauften nach (2) genau $15 - 10 = 5$ bei der ersten Rast und genau $15 - 12 = 3$ bei der zweiten Rast nichts zu trinken. Da niemand auf beide Käufe verzichtete, waren diese $5 + 3 = 8$ Teilnehmer bereits alle, die nicht zweimal zu trinken kauften. Von den 15 Teilnehmern über 30 Jahre kauften also $15 - 8 = 7$ zweimal zu trinken.

II. Nach (3) kauften von den 6 Teilnehmern, die 40 Jahre oder älter waren, genau 2 bei der ersten Rast und genau 2 bei der zweiten Rast nichts zu trinken, Daraus folgt entsprechend, daß $6 - (2 + 2) = 2$ dieser Teilnehmer zweimal zu trinken kauften.

Aus I. und II. folgt: Von den Teilnehmern, die älter als 30, aber jünger als 40 Jahre waren, kauften genau $7 - 2 = 5$ zweimal zu trinken.

Bemerkungen: Zur Lösung kann auch ein Mengendiagramm herangezogen werden (siehe Abbildung); dabei ist erforderlich, daß aus der Darstellung hervorgeht, mit welchen Begründungen die einzelnen Zahlen gewonnen werden.

	30 J. oder jünger	zwischen 30 und 40 J.	40 J. oder älter
1. Rast nicht, nur 2. Rast kaufen		3	2
1. und 2. Rast kaufen	5	**5**	2
2. Rast nicht, nur 1. Rast kaufen		1	2

Für die Zwischenschritte, die schließlich zur gesuchten Zahl 5 führen, gibt es mehrere Möglichkeiten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310621:

Die Bedingungen werden genau durch die Zahlen

a) 231213 und 312132,

b) 23421314 und 41312432

erfüllt.

Bemerkung: Die gesuchten Zahlen können durch "systematisches Probieren" gefunden werden; d.h., man kann z.B. folgendermaßen zum Nachweis gelangen, daß alle gesuchten Zahlen ermittelt sind (die Angabe eines solchen Nachweises wird nicht vom Schüler verlangt):

a) An die zwei Stellen zwischen den Ziffern $2 \cdot \cdot 2$ können weder die beiden Ziffern 1 noch die beiden Ziffern 3 kommen. Also enthält die gesuchte Zahl die Teilfolge 2132 (oder umgekehrt 2312). Nun kann die Ziffer 1 nur so hinzugefügt werden, daß 12132 (bzw. die umgekehrte Folge) entsteht. Daran anschließend ist nur 312132 (bzw. umgekehrt) möglich.

b) An den vier Stellen zwischen den Ziffern $4 \cdot \cdot \cdot \cdot 4$ muß eine der drei Ziffern 1, 2, 3 zweifach vorkommen. Die 3 kann dies nicht sein (da zwischen zwei Ziffern 3 dann nicht genug Platz wäre). Wäre es die 2, so müßte sie an die Stellen $42 \cdot \cdot 24$ kommen; zwischen den Ziffern 2 könnte dann keine Ziffer 1 stehen, also müßten dort beide Ziffern 3 stehen, was nicht möglich ist. Somit kommt nur $41 \cdot 1 \cdot 4$ (oder umgekehrt) in Betracht.

   Nun würde die Eintragung $41 \cdot 134$ aber $41 \cdot 134 \cdot \cdot 3$ verlangen, obwohl nur noch zwei Ziffern 2 einzutragen wären. Also kann nur mit $41 \cdot 124$ und anschließend eindeutig mit $41 \cdot 124 \cdot 2$ sowie mit 41312432 (bzw. umgekehrt 23421314) fortgesetzt werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310622:

a) In eine Tabelle sei zunächst das unentschiedene Spiel C gegen D eingetragen. Aus der Information, daß dies das einzige unentschiedene Spiel war, folgt: Alle anderen Punktzahlen sind 0 oder 2.

   Hätte A gegen C und D verloren (Abb. L 310622 a), so müßte wegen der von C und D erreichten unterschiedlichen Punktzahlen B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mindestens so viele Punkte wie A erreicht; dieser Fall scheidet also aus.

   Hätte A gegen B und eine der Mannschaften C, D verloren (ohne Beschränkung der Allgemeinheit gegen C; Abb. L 310622 b), so hätte schon deswegen B mindestens so viele Punkte wie A.

	A	B	C	D
A	-		0	0
B		-		
C	2		-	1
D	2		1	-

Abb. L 310622 a

	A	B	C	D
A	-	0	0	
B	2	-		
C	2		-	1
D			1	-

Abb. L 310622 b

Also hat A mindestens zwei Spiele gewonnen.

Hätte A gegen C und D gewonnen (Abb. L 310622 c), so müßte B gegen C und D unterschiedlich gespielt haben und hätte damit mehr Punkte als die von B besiegte dieser beiden Mannschaften. Also folgt: A hat gegen B und genau eine der Mannschaften C, D gewonnen, o.B.d.A. gegen C (Abb. L 310622 d).

	A	B	C	D
A	-		2	2
B		-		
C	0		-	1
D	0		1	-

Abb. L 310622 c

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	-		
C	0		-	1
D	2		1	-

Abb. L 310622 d

Weiter folgt: B hat weniger Punkte als A, also höchstens ein Spiel gewonnen. Hätte B gegen C und D dieselben Ergebnisse wie A gegen C und D erreicht, so ergäbe das 2 Punkte für B und 1 Punkt für die Verlierermannschaft. Hätte aber B gegen C, D entgegengesetzte Ergebnisse wie A, so hätten C und D beide 3 Punkte.

Also kann B überhaupt kein Spiel gewonnen haben, eine der Mannschaften C, D hat 3, die andere 5 Punkte.

Daher hat sich eindeutig ergeben: A belegte mit 4 Punkten den zweiten Platz.

b) Da beide Ergebnistabellen Abb. L 310622 e, f allen Informationen entsprechen, jedoch voneinander abweichende Endstände angeben, folgt: Die Informationen sind nicht ausreichend, um den genauen Endstand des Turniers angeben zu können.

	A	B	C	D
A	-	2	2	0
B	0	-	0	0
C	0	2	-	1
D	2	2	1	-

Abb. L 310622 e

	A	B	C	D
A	-	2	0	0
B	0	-	0	0
C	2	2	-	1
D	0	2	1	-

Abb. L 310622 f

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310623:

a) Man stellt fest: 256 ist durch 2 teilbar; es gilt $256 : 2 = 128$. Weiter gilt $128 : 2 = 64$. Indem man so fortgesetzt die Teilbarkeit durch 2 feststellt, ergibt sich

$$256 = 2 \cdot 128 = 2 \cdot 2 \cdot 64 = ... = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Also ist eine natürliche Zahl genau dann Teiler von 256, wenn sie entweder gleich 1 oder gleich dem Produkt von einer Anzahl Faktoren 2 ist, wobei diese Anzahl höchstens 8 beträgt. Für diese Anzahl gibt es somit genau 8 Möglichkeiten. Daher gibt es insgesamt 9 natürliche Zahlen, die Teiler von 256 sind.

Bemerkungen:

1. Man kann in der Darstellung zur Potenzschreibweise übergehen ($256 = 2 \cdot 128 = 2^2 \cdot 64 = ... = 2^8$), die Gleichung $256 = 2^8$ auch kürzer, z.B. unter Verwendung von Potenzgesetzen, gewinnen sowie die Teiler als die Zahlen 1 und 2^n ($n = 1, ..., 8$) kennzeichnen. Statt einer solchen "abstrakt" über die Beschreibung der Faktorenanzahl bzw. Exponenten erfolgten Aufzählung ist es natürlich auch möglich, die Teiler einfach konkret anzugeben.
2. Eine - wie immer gestaltete - Beschreibung von Teilern genügt allein nicht; vielmehr muß aus der Darstellung der Nachweis hervorgehen, daß die gesamte Teileranzahl ermittelt wurde. Entsprechendes gilt für b) und c):

b) Aus $2 \cdot 256 = 2^9$;

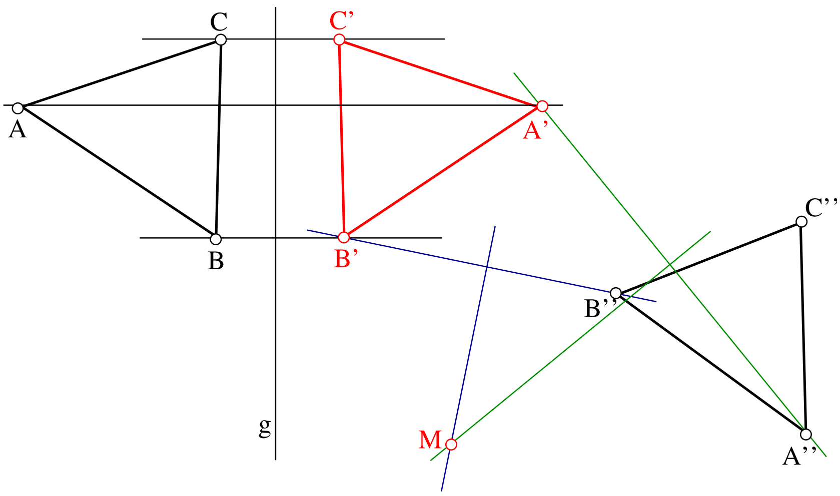
c) aus $256 \cdot 256 = 2^{16}$ folgt: Es gibt insgesamt 10 bzw. 17 natürliche Zahlen, die Teiler von $2 \cdot 256$ bzw. von $256 \cdot 256$ sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 310624:
Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote AA_1 , BB_1 , CC_1 von A, B, C auf g und verlängert sie über A_1, B_1 bzw. C_1 hinaus um ihre eigene Länge bis A', B', C'.

(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten m_1, m_2 von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt M.



Bemerkungen: Statt (2) können auch zwei andere Mittelsenkrechten konstruiert werden (oder zu Kontrollzwecken alle drei: von $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$).

Die Konstruktion der Lote in (1) kann auch unter Verwendung des Zeichendreiecks erfolgen, wobei keine Kreisbögen als Hilfslinien benötigt werden.

Die Konstruktion des Bildpunktes bei einer Geradenspiegelung kann auch - ohne weitere Aufgliederung in zwei Schritte (Lot, Verlängerung) - als ein Konstruktionsschritt beschrieben sein. Andererseits kann zum Konstruieren von Loten, Verlängerungen, Mittelsenkrechten eine ausführlichere Aufzählung von Hilfslinien vorgenommen werden; jedoch ist dies nicht vom Schüler zu fordern.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

32. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 320611:
Die einzigen natürlichen Zahlen, deren Quadrate von der ursprünglichen Zahl verschieden und einstellig sind, sind Zwei und Drei, also sind A und C Zwei bzw. Drei.

$A = 2$ und $C = 3$ führt wegen $A - C = F$ zum Widerspruch, also gelten $A = 3$, $C = 2$ und somit $B = 9$, $D = 4$, $E = 6$, $F = 1$ und $G = 5$, was die Probe bestätigt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320612:
Das schwarzhaarige Mädchen kann wegen (5) und (6) nicht Miriam, wegen (5) aber auch nicht Christiane sein, somit ist es Sabine.

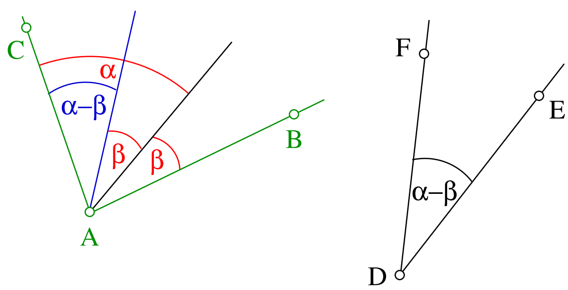
Miriam kann wegen (2) nicht blond sein, ist also rothaarig.

Damit kann das blonde Mädchen nur Christiane heißen.

In der Tat erfüllt diese Zuordnung alle sechs Forderungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320613:
Wenn man die Winkelmaße $\alpha+\beta$ und $\alpha-\beta$ addiert bzw. subtrahiert, so erhält man 2α bzw. 2β. Entsprechend kann man durch Antragen des Winkels mit dem Maß $\alpha - \beta$ an den Strahl AB^+ bzw. AC^+ Winkel mit den Maßen 2α bzw. 2β zeichnen. Diese Winkel kann man halbieren und so je einen Winkel mit den Maßen α bzw. β erhalten.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320614:
Die Entfernung zwischen den beiden Radfahrern betrug anfangs 350 Kilometer. Sie verringerte sich wegen $36\text{ km} + 34\text{ km} = 70\text{ km}$ täglich um 70 Kilometer. Folglich treffen sich die beiden Radfahrer wegen

$$350\text{ km} : 70\text{ km} = 5$$

in fünf Tagen.

Zur Probe kann man den von den Radfahrern in fünf Tagen zurückgelegten Weg berechnen:

Wegen $5 \cdot 36\text{ km} = 180\text{ km}$ liegt der Treffpunkt der beiden Radfahrer 180 Kilometer von Schnellhausen entfernt, und wegen $5 \cdot 34\text{ km} = 170\text{ km}$ beträgt seine Entfernung zu Sausedorf 170 km. Die beiden Wegstrecken ergeben zusammen die Entfernung Schnellhausen-Sausedorf: $180\text{ km} + 170\text{ km} = 350\text{ km}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 320621:

Durch Einfügen zweier Ziffern entsteht genau dann eine durch 9 teilbare Zahl, wenn deren Quersumme durch 9 teilbar ist. Das ist wegen $3 + 8 + 4 + 2 = 17$ genau dann der Fall, wenn die Summe der zwei eingefügten Ziffern sich von 1 nur um ein Vielfaches der Zahl 9 unterscheidet. Da eine Summe von zwei Ziffern höchstens $9 + 9 = 18$ betragen kann, ist folglich für die Summe der einzutragenden Ziffern nur entweder 1 oder 10 möglich. Alle Möglichkeiten, aus zwei Ziffern eine dieser Summen zu bilden, sind

$$1 = 0 + 1 = 1 + 0,$$
$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4 = 7 + 3 = 8 + 2 = 9 + 1.$$

Alle gesuchten Zahlen sind daher

380 142, 381 042, 381 942, 382 842, 383 742, 384 642, 385 542, 386 442, 387 342, 388 242, 389 142.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (29)

Lösung 320622:

a) Je genau zwei rote Seitenflächen befinden sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die vor dem Zersägen an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten, aber nicht eine seiner Ecken enthielten. Da der ursprüngliche Würfel genau 12 Kanten hatte, lagen an jeder seiner Kanten also genau $72 : 12 = 6$ derartige Teilwürfel. In der Verlängerung einer Reihe solcher Teilwürfel folgte nach beiden Seiten noch je genau ein Würfel, der eine Ecke des ursprünglichen Würfels enthielt. Einschließlich dieser beiden Würfel bestand eine solche Reihe also aus genau 8 Teilwürfeln. Daher wurde der ursprüngliche Würfel in $8^3 = 512$ Teilwürfel zersägt.

b) Je genau eine rote Seitenfläche befindet sich an genau denjenigen Teilwürfeln, die an eine Seitenfläche, aber nicht an eine Kante des ursprünglichen Würfels angrenzten. Für je eine der 6 Seitenflächen des ursprünglichen Würfels bildeten diese Teilwürfel eine quadratförmige Anordnung von $6 = 36$ Stück; daher gibt es insgesamt $6\text{-}36 = 216$ solche Teilwürfel.

c) Die Teilwürfel ohne rote Seitenfläche bildeten vor dem Zersägen eine würfelförmige Anordnung, die ganz im Innern des ursprünglichen Würfels lag und aus genau $63 = 216$ Teilwürfeln bestand.

Bemerkung: Zur Kontrolle kann man bestätigen, daß sich zusammen mit der Anzahl 8 der Teilwürfel an den Ecken des ursprünglichen Würfels (d.h. der Teilwürfel mit je genau drei roten Seitenflächen) wieder $72+216+216+8 = 512$ ergibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

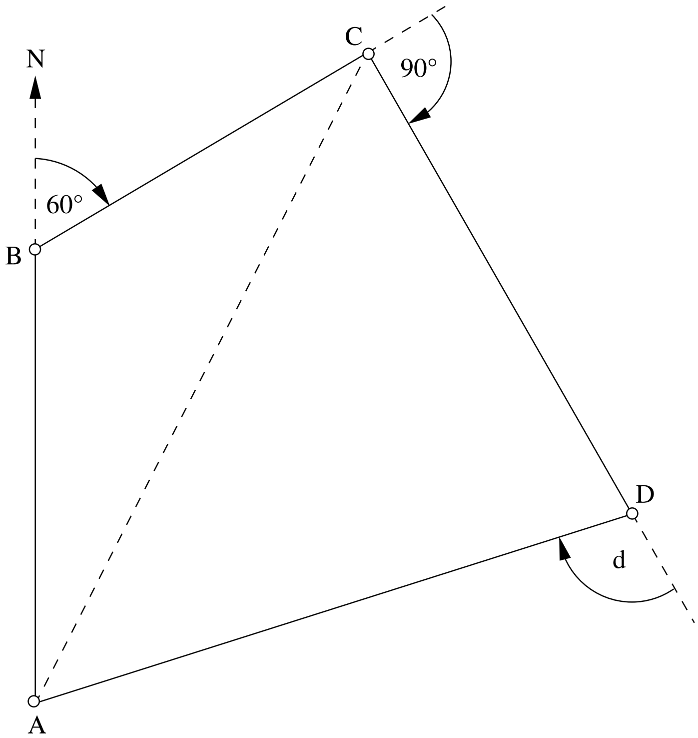
Lösung 320623:

Die Abbildung zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenauigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d.h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:

a) In D muß der Kurs um $\delta \approx 103°$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.

b) Die Strecke von D nach A ist etwa 820 m lang.

c) Der Punkt A ist von C etwa 950 m entfernt.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320624:

Thomas berechnet unter Berücksichtigung der Länge $a = 4,40$ m, der Breite $b = 3,30$ m des Zimmers und der Türbreite $t = 0,90$ m die erforderliche Gesamtlänge

$$2a + 2b - t = 8,80\text{ m} + 6,60\text{ m} - 0,90\text{ m} = 14,50\text{ m}.$$

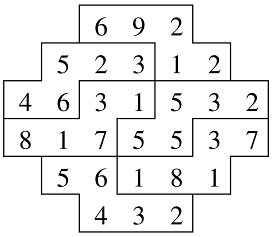
Hierfür sind $5 \cdot 14,50$ DM $= 72,50$ DM zu zahlen. Also erhält Thomas 100 DM $- 72,50$ DM $= 27,50$ DM zurück.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330611:



Die Abbildung zeigt eine Zerlegung der geforderten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330612:

Ist d das Ergebnis der Division der ersten Zahl durch 28, so lautet die erste Zahl $28 \cdot d$. Da d auch das Ergebnis der Division der zweiten Zahl durch 128 ist, lautet die zweite Zahl $128 \cdot d$.

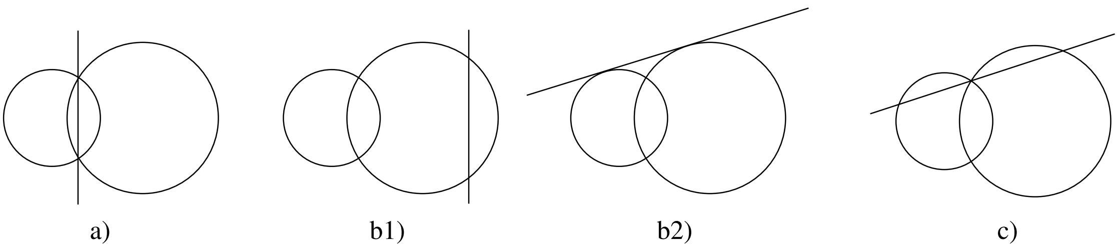
Als Summe der beiden Zahlen $28 \cdot d$ und $128 \cdot d$ ergibt sich folglich $156 \cdot d$; somit muß $156 \cdot d = 2\,028$ sein. Daraus ergibt sich $d = 2\,028 : 156 = 13$. Also sind durch die Forderungen eindeutig $28 \cdot 13 = 364$ und $128 \cdot 13 = 1\,664$ als erste bzw. zweite Zahl bestimmt.

Für sie bestätigt man: $364 : 28$ und $1\,664 : 128$ haben dasselbe Ergebnis 13, und es gilt $364 + 1\,664 = 2\,028$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330613:

Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330614:

Indem man, beginnend mit $1! = 1$, jeweils das zuletzt erhaltene Ergebnis der Reihe nach mit 2, 3, 4, ... usw. multipliziert und jedesmal nur die letzten drei Ziffern berücksichtigt, findet man: Es ist

$$\begin{aligned}1! &= 1,\\ 2! &= 2,\\ 3! &= 6,\\ 4! &= 24,\\ 5! &= 120,\\ 6! &= 720;\end{aligned}$$

die letzten drei Ziffern von 7! sind ...040
die letzten drei Ziffern von 8! sind ...320
die letzten drei Ziffern von 9! sind ...880
die letzten drei Ziffern von 10! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 11! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 12! sind ...600
die letzten drei Ziffern von 13! sind ...800
die letzten drei Ziffern von 14! sind ...200

Von 15! an lauten die letzten drei Ziffern stets ...000, bei der verlangten Addition ändern sie also das Ergebnis nicht mehr. Durch Addition der hier verzeichneten Ergebnisse folgt daher bereits: Die letzten drei Ziffern von $1! + 2! + ... + 100!$ lauten ...317.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330621:

Anzahlangabe: Es waren 8 Störche, 6 Hasen und 16 Käfer.

Überprüfen der Erzählung: Die 8 Störche haben 16 Beine, also ebenso viele, wie es Käfer gibt. Die 16 Käfer haben 96 Beine, also 90 mehr, als es Hasen gibt. Die 6 Hasen haben 24 Beine, das sind dreimal so viele, wie es Störche gibt.

Bemerkungen: Die Anzahlen können mit Hilfe der Gleichungen $k = 2s$, $h + 90 = 6k$, $3s = 4h$ gefunden werden, z.B. indem man rechnet: Es folgt

$$\begin{aligned} h + 90 &= 6 - 2s = 12s = 4 - 3s = 4 - 4h = 16h, \\ 90 &= 15h \\ h &= 6 \quad \text{und dann} \\ 6 + 90 &= 6k, \\ k &= 16 \quad \text{sowie} \\ 16 &= 2s, \\ s &= 8. \end{aligned}$$

Man kann z.B. auch durch folgendes Probieren zu Anzahlen kommen: Es sind mehr als 90 Käferbeine, also mehr als 15 Käfer. Ein probeweises Ansetzen der Käferzahl 16 ergibt $16 : 2 = 8$ als Anzahl der Störche und $96 - 90 = 6$ (oder $3 \cdot 8 : 4 = 6$) als Anzahl der Hasen.

Die Wiedergabe eines solchen heuristischen Weges und erst recht die (beim Lösen des Gleichungssystems oder bei weiterem Probieren zu gewinnende) Einsicht, daß die Anzahlen eindeutig bestimmt sind, werden - gemäß dem Aufgabentext - nicht vom Schüler verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330622:

Für jede Möglichkeit, als Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 zu wählen, gibt es so viele Zahlen, wie es Reihenfolge-Möglichkeiten der übrigen vier Ziffern gibt. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt 24. (Dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder z.B. so gefunden werden: Für die erste dieser vier Ziffern hat man 4 Möglichkeiten, bei jeder von ihnen für die zweite Ziffer 3 Möglichkeiten, bei jeder der so entstandenen $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten gibt es 2 Reihenfolgen der letzten beiden Ziffern; also gibt es genau $12 \cdot 2 = 24$ Reihenfolgen für vier Ziffern.)

Als Summe der Einerziffern erhält man folglich

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360.$$

Dasselbe gilt für die Summe der Zehner-, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderziffern. Daher ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der folgenden Rechnung:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 3 & 6 & 0 \\
 & & & 3 & 6 & 0 & \\
 & & 3 & 6 & 0 & & \\
 & 3 & 6 & 0 & & & \\
3 & 6 & 0 & & & & \\
\hline
3 & 9 & 9 & 9 & 9 & 6 & 0
\end{array}$$

Bemerkung: Korrekt (wenn auch zeitraubend) ist es natürlich auch, die 120 Summanden aufzuschreiben und zu addieren. Jedoch sollte die volle Punktzahl nur dann erteilt werden, wenn aus dem Lösungstext die Vollständigkeit der Summandenberücksichtigung ersichtlich ist, (Das gilt erst recht für begonnene und mit "usw." abgebrochene Aufzählungen.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330623:

In Abb. a und Abb. b sind zwei mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade g kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden (eine solche Beschreibung wird nicht vom Schüler gefordert; gemäß dem allgemeinen Vorspanntext sollte aber grundsätzlich ersichtlich sein, daß g nicht etwa nur durch "ungefähres Einpassen" gewählt wurde, da die *genaue* Lage einer Ecke von $A'B'C'$ auf k oder das *genaue* Berühren von k an eine Seite erforderlich ist):

a) Man konstruiert das Lot von C auf AB. Ist D sein Fußpunkt, so verlängert man DC über C hinaus bis zum Schnitt D' mit k. Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von DD'.

b) Man verlängert BC über C hinaus bis zum Schnitt B' mit k. Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von BB'.

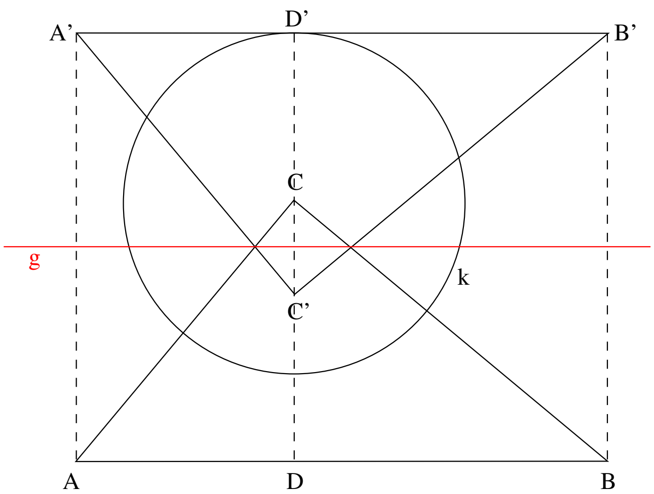


Abbildung a

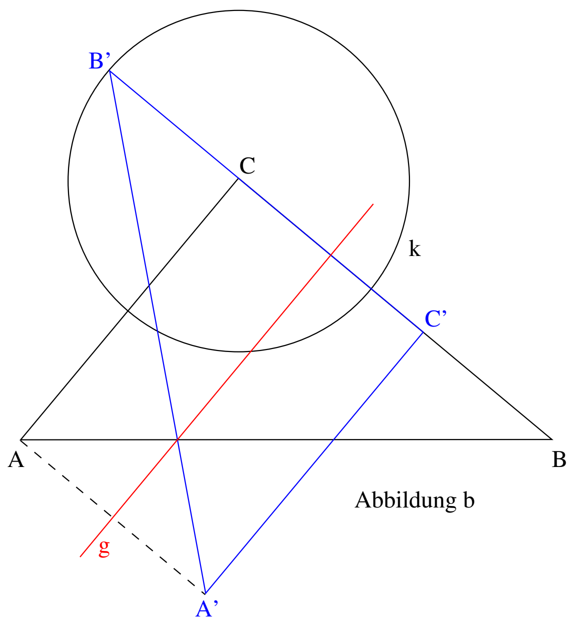


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330624:

Für die Anzahlen b, g, r der blauen, gelben bzw. roten Kugeln gilt $9 \leq b+g+r \leq 21$, da jede der drei Zahlen b, g, r mindestens 3 und höchstens 7 beträgt. Da $b+g+r$ eine Primzahl ist, kann dies nur eine der Zahlen 11, 13, 17, 19 sein. Nach dem Herausnehmen von einer gelben und zwei roten Kugeln verbleibt eine der Anzahlen 8, 10, 14, 16. Von ihnen ist nur 10 durch 5 teilbar; also mußte $b+g+r=13$ sein.

Alle Möglichkeiten, 13 in drei Summanden zu zerlegen, die mindestens 3 und höchstens 7 betragen, sind

$$\begin{array}{lllll}
3+3+7, & \boxed{4+3+6}, & 5+3+5, & 6+3+4, & \boxed{7+3+3} \\
3+4+6, & 4+4+5, & \boxed{5+4+4}, & 6+4+3 & \\
\boxed{3+5+5}, & 4+5+4, & 5+5+3, & & \\
3+6+4, & 4+6+3, & & & \\
3+7+3. & & & &
\end{array}$$

Nur bei den eingerahmten Zerlegungen ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar. Verringert man in diesen Zerlegungen den zweiten Summanden um 1 und den dritten um 2, so entsteht

$$3+4+3, \qquad \boxed{4+2+4}, \qquad 5+3+2, \qquad 7+2+1.$$

Nur bei der eingerahmten Zerlegung (entstanden aus der Zerlegung $4+3+6$) ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar.

Also waren zu Anfang 4 blaue, 3 gelbe und 6 rote Kugeln in der Schachtel.

Bemerkung: Da die Existenz von Anzahlen mit den genannten Eigenschaften dem Aufgabentext entnommen werden kann, ist eine Probe nicht zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe erforderlich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330631:

Es muß $b \leq 4$ sein; denn wäre $b \geq 5$, so folgte wegen $c-b=3$, daß $c \geq 8$ wäre. Damit wäre bereits $b+c \geq 13$, also erst recht $a+b+c \geq 13$, im Widerspruch zu $a+b+c=12$.

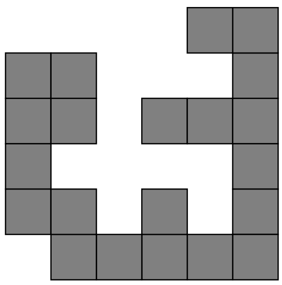
Für $b=0$ folgt $c=3$ und wegen $a+b+c=12$ dann $a=9$.
Für $b=1$ folgt $c=4$ und wegen $a+b+c=12$ dann $a=7$.
Für $b=2$ folgt $c=5$ und wegen $a+b+c=12$ dann $a=5$.
Für $b=3$ folgt $c=6$ und wegen $a+b+c=12$ dann $a=3$.
Für $b=4$ folgt $c=7$ und wegen $a+b+c=12$ dann $a=1$.

Damit sind alle gesuchten Zusammenstellungen gefunden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330632:

Es gibt viele Möglichkeiten. Ein Beispiel:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330633:

Beim Angeben der Reihenfolge seien die Pfeile und die Angabe von (E) am Anfang und Ende weggelassen.

(a) Es gibt genau die 4 Möglichkeiten ABC, ACB, BCA, CBA.

(b) Für 4 Häuser A, B, C, D gibt es genau die 8 Möglichkeiten $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $ADCB$, $BCDA$, $BDCA$, $CDBA$, $DCBA$.

(c) *1. Lösungsweg* (schrittweises Erhöhen der Häuserzahl):

Für 4 Häuser A, B, C, D gibt es zu jedem Weg, der für die Häuser B,C,D (etwa aus (a) durch Umbenennung) zu erhalten ist, genau 2 Wege, nämlich indem das Haus A entweder vor dem betreffenden

Weg für B, C, D beliefert wird oder erst anschließend an diesen Weg. So ergaben sich in (b) die $4 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Wege.

Entsprechend kann man fortsetzen und findet für 5 Häuser $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Wege, für 6 Häuser $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Wege, ... , schließlich für 10 Häuser $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 == 512$ Wege.

2.Lösungsweg (Einführen unabhängiger Fallunterscheidungen):

Auf dem Hinweg zum letzten der 10 Häuser hat man bei jedem der vorangehenden 9 Häuser zu entscheiden, ob man dieses Haus sogleich auf dem Hinweg beliefert oder seine Belieferung erst für den Rückweg vorsieht. Da diese 9 Entscheidungen unabhängig voneinander sind, ergeben sie insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 == 512$ Möglichkeiten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330634:

Da Dieters Aussagen falsch sind, gilt:

(1') Jedes Kind bekam eine der blauen Kugeln.

(2') Annette bekam entweder genau eine Kugel oder genau drei Kugeln.

(3') Bernd bekam keine verschiedenfarbigen Kugeln.

Nach (1') und weil nur drei blaue Kugeln vorhanden waren, bekam jedes Kind genau eine der blauen Kugeln. Nach (3') kann Bernd überhaupt keine weitere Kugel bekommen haben. Hätte Annette genau eine Kugel bekommen, so wären auf Christiane vier Kugeln entfallen. Da sie aber (wie jedes der Kinder) höchstens drei Kugeln bekam, scheidet dieser Fall aus; d.h. nach (2'): Annette muß genau drei Kugeln bekommen haben, also außer der einen blauen Kugel noch genau zwei gelbe Kugeln. Die restliche gelbe Kugel verblieb für Christiane.

Damit sind die Zahlen der Verteilung eindeutig bestimmt:

Annette bekam genau 1 blaue Kugel und genau 2 gelbe Kugeln.
Bernd bekam genau 1 blaue Kugel und keine gelbe Kugel.
Christiane bekam genau 1 blaue Kugel und genau 1 gelbe Kugel.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330635:

(a) Als Lösung genügt es, eine Eintragung der geforderten Art anzugeben, zum Beispiel Abb. a):

(b) Es gibt auch eine Eintragung der geforderten Art mit nur 6 verwendeten Buchstaben. Dies wird etwa durch Abb. b) bewiesen:

a	b	c	d
e	f	g	a
d	b	e	c
e	g	b	a

Abb. a)

a	b	a	c
d	c	e	a
f	d	b	f
b	e	d	a

Abb. b)

(c) Eine Eintragung der geforderten Art mit nur 5 verwendeten Buchstaben kann es nicht geben.

Beweis: Im 4×4 - Feld lassen sich in jeder der 4 Zeilen und in jeder der 4 Spalten 3 "Wörter" lesen, zusammen also $(4 + 4) \cdot 3 = 24$ "Wörter". Es sind aber nur 20 "Wörter" zugelassen, nämlich mit einem der 5 Buchstaben am Anfang und dann jeweils mit einem der 4 anderen Buchstaben am Ende. Bei jeder Eintragung, die nur zugelassene "Wörter" aufweist, muß es also auch mehrfach auftretende "Wörter" geben; daher ist sie nicht von der geforderten Art.

Hinweis: statt eines allgemein formulierten Beweises wie oben genügt es auch, die 20 "Wörter" so systematisch aufzuzählen, daß aus der Aufzählung die Vollständigkeit ersichtlich ist, z.B.: *ab*, *ac*, *ad*, *ae*; *ba*, *bc*, *bd*, *be*; *ca*, *cb*, *cd*, *ce*; *da*, *db*, *dc*, *de*; *ea*, *eb*, *ec*, *ed*.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330636:

a) Ist n = 2 vereinbart, so kann Anja den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang eine der Ziffern 2, 4, 6, 8 auf das Feld ganz rechts (das Feld für die Einerziffer) bringt. Nach der Teilbarkeitsregel für 2 entsteht dann nämlich bei jeder Fortsetzung eine durch 2 teilbare Zahl. Ebenso kann Anja im Fall n = 5 den Gewinn erzwingen, indem sie zu Anfang die Ziffer 5 auf das Feld ganz rechts bringt.

b) Die Summe (1+8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) der Zahlen auf allen Karten ist durch 9 teilbar. Da am Ende genau eine der Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 übrigbleibt und diese Zahl nicht durch 9 teilbar ist, kann auch die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 9 teilbar sein, gleichgültig, von wem und in welcher Reihenfolge sie ausgelegt wurden. Nach der Teilbarkeitsregel für 9 besagt das aber: Die ausgelegte siebenstellige Zahl ist nicht durch 9 teilbar; Bernd hat gewonnen.

c) Bernd kann den Gewinn erzwingen, indem er dafür sorgt, daß jedenfalls die Zahlen 3 und 6 sich unter den ausgelegten befinden (er hat ja - sogar dreimal - Gelegenheit, von ihm gewünschte Zahlen nötigenfalls selbst auszulegen). Damit erreicht er, ähnlich wie in b): Da die Summe der Zahlen auf allen Karten durch 3 teilbar ist und eine nicht durch 3 teilbare Zahl übrigbleiben muß, kann die Summe der ausgelegten Karten nicht durch 3 teilbar sein. Also ist die ausgelegte siebenstellige Zahl nicht durch 3 teilbar; folglich kann sie auch nicht durch 21 teilbar sein.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340611:

a) Da Herr Eilig für 475 Kilometer 3 Stunden und 10 Minuten, d.h. 19 mal 10 Minuten brauchte, fuhr er in je 10 Minuten durchschnittlich $475 : 19 = 25$ Kilometer, in jeder Stunde also $6 \cdot 25 = 150$ Kilometer; d.h., seine durchschnittliche Geschwindigkeit betrug 150 km/h.

b) Da er für die $475 = 25 \cdot 19$ Kilometer $57 = 3 \cdot 19$ Liter Benzin brauchte, waren es für je 25 Kilometer durchschnittlich 3 Liter, also für je 100 Kilometer viermal so viel, d.h. 12 Liter.

c) Hätte er für je 100 Kilometer nur 8 Liter gebraucht, so hätte er in je 100 Kilometern noch 4 Liter übrig behalten. Da das die Hälfte von 8 Litern ist, hätte er zu der insgesamt gefahrenen Strecke von 475 Kilometern zusätzlich noch eine halb so lange Strecke fahren können. Wegen $475 = 474 + 1$ und $474 : 2 = 237$ sind das 237 Kilometer und ein halber Kilometer (500 Meter).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340612:
Es gibt genau

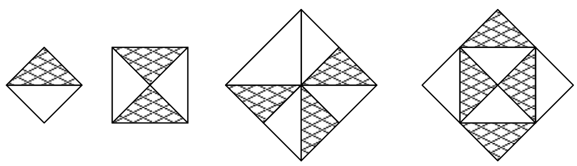
4 Quadrate aus je zwei Fliesen,

5 Quadrate aus je vier Fliesen,

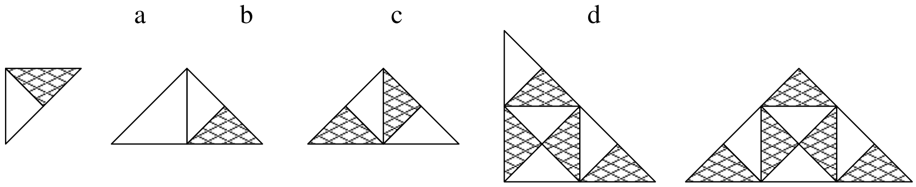
4 Quadrate aus je sieben Fliesen,

1 Quadrat aus acht Fliesen

(siehe die Beispiele Abb. a, b, c, d), also insgesamt 14 Quadrate der gesuchten Art.



a b c d



e f g h i

Es gibt genau

20 Dreiecke aus je zwei Fliesen,

8 Dreiecke aus je drei Fliesen,

8 Dreiecke aus je vier Fliesen,

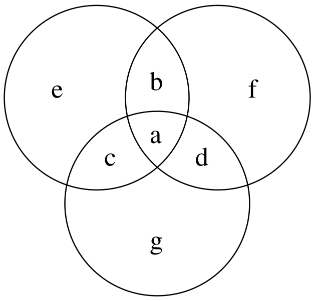
4 Dreiecke aus je acht Fliesen,

4 Dreiecke aus je neun Fliesen

(siehe die Beispiele Abb. e, f, g, h, i), also insgesamt 44 Dreiecke der gesuchten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340613:



Für die Anzahl t aller Teilnehmer und für die in der Abbildung dargestellten Anzahlen gilt nach den Angaben

$$a+b+c+d+e+f+g=t, \quad (1)$$
$$a+b+c+e=22, \quad (2)$$
$$a+b+d+f=4, \quad (3)$$
$$a+c+d+g=13, \quad (4)$$
$$a+b=10, \quad (5)$$
$$a+c=4, \quad (6)$$
$$a+d=5, \quad (7)$$
$$a=2. \quad (8)$$

Aus (5) und (8) folgt $b=8$
aus (6) und (8) folgt $c=2$
aus (7) und (8) folgt $d=3$
aus (2) und (8), (9), (10) folgt $e=10$
aus (3) und (8), (9), (ll) folgt $f=1$
aus (4) und (8), (10), (ll) folgt $g=6$

Damit folgt aus (1) und (8) - (14), daß die Anzahl t eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $t=32$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

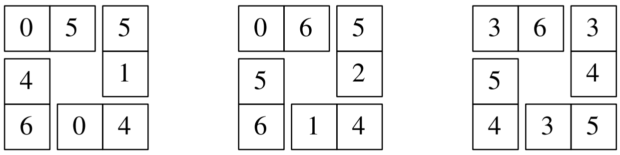
Lösung 340614:

a) Alle Steine eines Dominospiels sind

$$\begin{array}{rrrrrrr}
(0,0), & (0,1), & (0,2), & (0,3), & (0,4), & (0,5), & (0,6),\\
 & (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6),\\
 & & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6),\\
 & & & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6),\\
 & & & & (4,4), & (4,5), & (4,6),\\
 & & & & & (5,5), & (5,6),\\
 & & & & & & (6,6).
\end{array}$$

Es genügt eine Angabe wie z.B. in der obigen Ziffernschreibweise; eine zeichnerische Wiedergabe mit Punktsymbolen wird nicht vom Schüler verlangt.

b) Beispiele der verlangten Art zeigen die Abbildungen.



Bemerkung: Die obigen Beispiele erfüllen sogar die Bedingung, daß alle drei Fenster gleichzeitig mit Steinen eines Dominospiels gelegt werden können. Das Erfüllen dieser zusätzlichen Bedingung wird nicht vom Schüler verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340621:

(a) Da der Jogger in 20 Sekunden 100 m schafft und da 20 Minuten 60 mal so viel Zeit sind wie 20 Sekunden, schafft er in 20 Minuten $60 \cdot 100\text{ m} = 6\,000\text{ m}$.

(b) Während er die 1 600 m mit der niedrigeren Geschwindigkeit läuft, braucht er 16 mal so viel Zeit wie für 100 m, also $16 \cdot 30$ Sekunden $= 480$ Sekunden $= 8$ Minuten. Wegen $20 - 8 = 12$ bleiben 12 Minuten für die höhere Geschwindigkeit. Da eine Minute 3 mal so viel Zeit wie 20 Sekunden ist, schafft er in diesen 12 Minuten $3 \cdot 12 \cdot 100\text{ m} = 3\,600\text{ m}$.

Insgesamt legt er so $1\,600\text{ m} + 3\,600\text{ m} = 5\,200\text{ m}$ zurück.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340622:

(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $\overline{AD} = 35$ m. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $\overline{EF} = 25$ m.

(b) Wegen $1225 + 625 = 1850$ haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen $1850 : 2 = 925$ somit 925 Quadratmeter.

(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $\overline{EF} = 25$ m ist wegen $925 : 25 = 37$ die andere Seitenlänge $\overline{FH} = 37$ m. Damit ergibt sich

$$\overline{GH} = \overline{FH} - \overline{FG} = 37\text{ m} - 25\text{ m} = 12\text{ m}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340623:
Für jeden ”Zahlenzug” gilt: Im letzten ”Waggon” steht eine 1. Steht in einem ”Waggon” eine ungerade Zahl, so steht im vorangehenden ”Waggon” das Doppelte. Steht aber in einem ”Waggon” eine gerade Zahl, so steht im vorangehenden ”Waggon” entweder die um 1 größere Zahl oder das Doppelte.

(a) Hieraus folgt der Reihe nach: Im vorletzten ”Waggon” steht eine 2, davor entweder eine 3 oder eine 4; vor der 3 steht eine 6; vor der 4 steht entweder eine 5 oder eine 8.

Damit ist als vollständige Aufzählung der ”Zahlenzüge” aus genau 4 ”Waggon” begründet: (6, 3, 2, 1), (5, 4, 2, 1), (8, 4, 2, 1).

(b) Wählt man bei jeder geraden Zahl die Möglichkeit, als vorangehende Zahl das Doppelte zu nehmen, so erhält man als "Zahlenzug" aus genau 7 "Waggon": (64, 32, 16, 8, 4, 2, 1). Da das Verdoppeln einer Zahl, die größer als 1 ist, stets zu einem größeren Ergebnis führt als das Addieren von 1, ist eine größere Anfangszahl nicht möglich; damit ist als größtmögliche Anfangszahl 64 nachgewiesen.

(c) Im Anschluß an (a) folgt der Reihe nach:

Als fünftletzte Zahl sind genau möglich: Wenn sie ungerade ist, 7 und 9; wenn sie gerade ist, 10, 12, 16;

als sechstletzte Zahl: ungerade 11, 13, 17; gerade 14, 18, 20, 24, 32.

Für die hierzu vorangehende Anfangszahl ist damit als kleinste ungerade Zahl 15, als kleinste gerade Zahl 22, also insgesamt 15 als kleinstmögliche Anfangszahl nachgewiesen.

Der "Zahlenzug" hierzu lautet (15, 14, 7, 6, 3, 2, 1).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

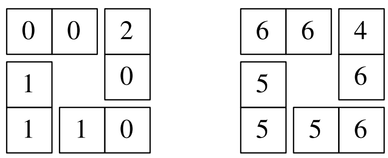
Lösung 340624:

(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel der geforderten Art.

(b) Die einzige Darstellung von 18 als Summe dreier Zahlen von 0 bis 6 ist $18 = 6+6+6$. Ein Fenster mit der Seitensumme 18 könnte daher nur aus Dominosteinen (6,6) bestehen. Da nach dem Aufgabentext das Fenster aber aus Steinen eines Dominospiels zu legen wäre und das Dominospiel den Stein (6,6) nur einmal enthält, ist ein solches Fenster nicht möglich.

(c) Drei solche Zahlen sind 0, 1 und 17. Die einzige Summendarstellung (ohne Beachtung der Reihenfolge) ist nämlich $0 = 0 + 0 + 0$ bzw. $1 = 0 + 0 + 1$ bzw. $17 = 6 + 6 + 5$. Daher könnte ein Fenster mit der Seitensumme 0 nur aus Steinen (0,0) bestehen, ist also nicht möglich; und zur Seitensumme 1 bzw. 17 müßte gelten:

Um auf der oberen waagerechten Seite diese Summe zu erreichen, müßte entweder links oben der Stein (0,1) bzw. der Stein (6,5) liegen und rechts davon eine 0 bzw. 6 vorkommen, oder es müßte links oben (0,0) bzw. (6,6) liegen und rechts davon 1 bzw. 5. Da auch auf der rechten Seite die Summe 1 bzw. 17 zu erreichen ist, folgt in beiden Fällen: Mindestens einer der Steine links oben, rechts oben müßte (0,1) bzw. (6,5) sein. Ebenso folgt: Mindestens einer der Steine rechts unten, links unten müßte (0,1) bzw. (6,5) sein. Da das Dominospiel auch diesen Stein nur einmal enthält, sind somit ebenfalls die Seitensummen 1 und 17 als nicht erreichbar nachgewiesen.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340631:

Die Abbildungen L340631 a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

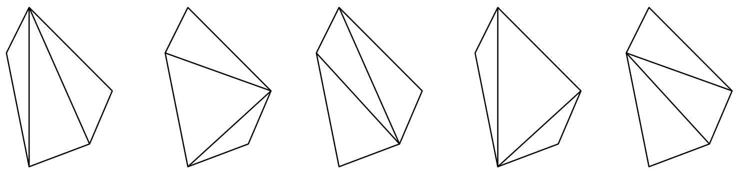


Abbildung a

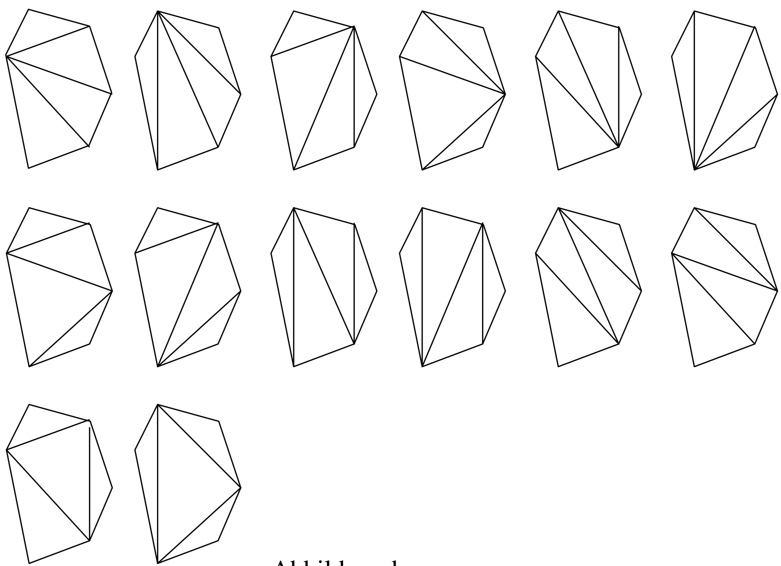


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340632:

(a) Die gesuchten Wörter, bereits alphabetisch geordnet, sind:

$ADLN$,	$ADNL$,	$ALDN$,	$ALND$,	$ANDL$,	$ANLD$,
$DALN$,	$DANL$,	$DLAN$,	$DLNA$,	$DNAL$,	$DNLA$,
$LADN$,	$LAND$,	$LDAN$,	$LDNA$,	$LNAD$,	$LNDA$,
$NADL$,	$NALD$,	$NDAL$,	$NDLA$,	$NLAD$,	$NLDA$.

(b) Das Wort $LAND$ steht hierbei an der 14. Stelle.

(c) Für die Wahl des 1. Buchstabens (aus den 6 Buchstaben U, M, L, A, N, D) hat man genau 6 Möglichkeiten. In jeder dieser Möglichkeiten hat man für die Wahl des 2. Buchstabens genau 5 Möglichkeiten. Damit ergeben sich $6 \cdot 5$ Möglichkeiten für die Wahl der ersten beiden Buchstaben. Entsprechend folgt: Für die Wahl der ersten drei Buchstaben hat man $6 \cdot 5 \cdot 4$ Möglichkeiten. So fortfahrend ergibt sich: Es gibt genau $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Wörter aus den 6 Buchstaben des Wortes $UMLAND$.

(d) Um die Wörter zu kennzeichnen, die dem Wort $UMLAND$ vorangehen, betrachten wir zunächst die mit A beginnenden Wörter. Sie werden gebildet, indem man auf A alle Wörter aus den 5 Buchstaben D, L, M, N, U folgen läßt. Wie in (c) ergibt sich, daß dies genau $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter sind.

In dieser Weise fortfahrend kommt man zu folgender Aufzählung. Dem Wort $UMLAND$ gehen insgesamt voran:

Für jeden der $\underline{5}$ Buchstaben A, D, L, M, N jeweils $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Wörter, die mit diesem betreffenden Buchstaben beginnen;

weitere, mit U beginnende Wörter, und zwar für jeden der $\underline{3}$ Buchstaben A, D, L jeweils $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Anfangsbuchstaben U folgt;

weitere, mit UM beginnende Wörter, und zwar für jeden der $\underline{2}$ Buchstaben A, D jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Wörter, in denen dieser betreffende Buchstabe auf den Wort-Anfang UM folgt;

schließlich (nach den zuletzt erfaßten Wörtern mit dem Wort-Anfang UMD) das <u>eine</u> Wort $UMLADN$.

Zusammen sind das $\underline{5} \cdot 120 + \underline{3} \cdot 24 + \underline{2} \cdot 6 + \underline{1} = 685$ Wörter. Also steht das Wort $UMLAND$ an der 686. Stelle.

Bemerkung: Zur vertieften Beschäftigung mit Aufgaben dieser Art kann man Fragen wie etwa die folgende behandeln: Welches Wort steht (bei alphabetischer Reihenfolge der aus dem Wort $UMLAND$ gebildeten Wörter) an der 352. Stelle der Aufzählung? Zur Beantwortung dieser Frage ist folgende Rechnung nützlich: Es gilt

$$351 = \underline{2} \cdot 120 + 111, \qquad 111 = \underline{4} \cdot 24 + 15, \qquad 15 = \underline{2} \cdot 6 + 3, \qquad 3 = \underline{1} \cdot 2 + 1.$$

Die unterstrichenen Zahlen ermöglichen nämlich eine Übersicht über die ersten 351 Wörter der Aufzählung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

<u>Lösung 340633:</u>
Beispiele zu (a) sind etwa:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \qquad \frac{3}{13} = \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{39}$$

(b),(c) Es gilt

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{37} = \frac{37-36}{36 \cdot 37} = \frac{1}{1332}, \text{ also } \frac{1}{36} = \frac{1}{37} + \frac{1}{1332},$$
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}, \text{ also } \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Dabei hat der Summand $\frac{1}{37}$ (bzw. der Summand $\frac{1}{n+1}$) die verlangte Eigenschaft, daß kein größerer Stammbruch Summand in einer solchen Darstellung sein kann.

Beweis:

Unter den natürlichen Zahlen ist 37 (bzw. $n+1$) die nächstgrößere zu 36 (bzw. zu n), d.h.: Es gibt unter den natürlichen Zahlen, die größer als 36 (bzw. als n) sind, *keine kleinere als* 37 (bzw. $n+1$). Daraus folgt:

Es gibt unter den Stammbrüchen, die (in einer gesuchten Darstellung als Summand auftreten und daher) kleiner als $\frac{1}{36}$ (bzw. als $\frac{1}{n}$) sein müssen, *keinen größeren als* $\frac{1}{37}$ (bzw. $\frac{1}{n+1}$).

Bemerkung: Interessiert man sich für Zerlegungen, die nicht $\frac{1}{n+1}$, sondern den nächstkleineren Stammbruch $\frac{1}{n+2}$ enthalten, so findet man z.B. für jede gerade Zahl $n = 2m$

$$\frac{1}{2m} = \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m \cdot (m+1)},$$

z.B. für jede ungerade Zahl $n = 2m - 1$

$$\frac{1}{2m-1} = \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2m^2 \cdot (4m^2-1)}$$

und z.B. für jede natürliche Zahl n

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n \cdot (n+2) \cdot (n+1)^2}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340634:

I. Wenn a, b, c die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen von drei an einer Ecke zusammentreffenden Kanten eines Quaders sind, auf den Veras Aussagen (1), (2), (3) zutreffen, so folgt:

   Nach (3) sind genau zwei der a, b, c einander gleich; die Bezeichnungen lassen sich so wählen, daß $b = c$ gilt.

   Nach (2) und weil jede der Kantenlängen a, b, c genau 4 mal vorkommt, folgt daher

   $$a + 2b = 320 : 4 = 80. \qquad (4)$$

   Aus (1) folgt ferner: Es gilt

   entweder $a = 2b$ (5)
   oder $b = 2a$. (6)

   Gilt (4) und (5), so folgt $a + a = 80$, also

   $$a = 40,\ b = 20,\ c = 20. \qquad (7)$$

   Gilt aber (4) und (6), so folgt $a + 4a = 80$, $5a = 80$, also

   $$a = 16,\ b = 32,\ c = 32. \qquad (8)$$

II. Die in (7) genannten Zahlen erfüllen (4) und (5), die in (8) genannten Zahlen erfüllen (4) und (6); außerdem gilt in beiden Fällen $b = c$. Daher treffen in beiden Fällen Veras Aussagen (1), (2), (3) zu.

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Kantenlängen eines Quaders sind durch Veras Angaben (1), (2), (3) nicht eindeutig bestimmt (d.h. Utes Meinung ist nicht wahr), sondern es gibt für die Kantenlängen eines Quaders, auf den Veras Aussagen zutreffen, genau die beiden Möglichkeiten, daß diese Kantenlängen entweder 40 cm, 20 cm, 20 cm oder 16 cm, 32 cm, 32 cm betragen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340635:

(a) Die Abbildung zeigt je ein Beispiel für Eintragungen mit den "Seitensummen" 2, 13 und 17.

1	1	0
0		2
1	1	0

4	6	3
5		4
4	3	6

5	6	6
6		5
6	5	6

(b) Der Unterschied kann folgendermaßen erklärt werden: Für das Schema aus Abbildung zur Aufgabe a ist eine Eintragung mit der "Seitensumme" 18 möglich, indem man in alle acht Felder eine 6 einträgt.

Daraus jedoch, daß ein Dominospiel nur einen Stein (6;6) enthält, folgt: Mit den Steinen eines Dominospiels ist eine solche Eintragung nicht möglich. (Das Ausführen dieses Schlusses, wie z.B. im folgenden angegeben, kann auch durch einen Verweis auf 340624 (b) ersetzt werden:) Die einzige Möglichkeit, 18 als Summe von drei Summanden darzustellen, die nur Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 sein dürfen, lautet nämlich $18 = 6 + 6 + 6$. Demzufolge gibt es keine andere Möglichkeit, die "Seitensumme" 18 zu erreichen, als mit der 6 in allen Feldern. Dazu wäre aber mehr als ein Stein (6;6) erforderlich.

(c) Eine Beziehung zwischen den Zahlen für b, d, f, h ist $b + f = d + h$.

Beweis:

Wegen der Gleichheit aller vier "Seitensummen" gelten z.B. auch die Gleichungen

$$a + b + c = c + d + e \quad \text{und}$$
$$e + f + g = g + h + a,$$

die auf beiden Seiten eine Eckenzahl enthalten. Daher gelten auch die Gleichungen

$$a + b = d + e,$$
$$e + f = a + h.$$

Aus ihnen folgt $(\underline{a} + b) + (\underline{e} + f) = (d + \underline{e}) + (h + \underline{a})$. Da auch in dieser Gleichung auf beiden Seiten übereinstimmende Summanden, nämlich a und e, vorkommen, folgt

$$b + f = d + h.$$

Hinweis zur Korrektur: In der Aufgabenstellung war offengelassen, welche "besondere Beziehung" anzugeben ist. Andere mögliche Angaben sind Beziehungen, die zu der hier genannten Gleichung äquivalent sind (Beispiel: "Es gilt $b - d = h - f$.") oder auch nur aus ihr folgen (Beispiel: "Von den Zahlen b, d, f, h sind entweder alle vier oder keine oder genau zwei ungerade." Weiteres Beispiel: "Wenn $b < d$ ist, dann ist $h < f$."). In die Bewertung einer Schülerlösung ist einzubeziehen, ob bzw. wie weit ein Beweis für die Allgemeingültigkeit einer angegebenen Beziehung korrekt ist - natürlich unter Berücksichtigung altersgerechter Formulierungsmöglichkeiten. Eine Bewertung nach der "Qualität" einer Angabe sollte mit Vorsicht erfolgen, um der Ungenauigkeit der Zielformulierung "ganz besondere Beziehung" Rechnung zu tragen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340636:

(a) I. Aus den Feststellungen (1), (2), (3), (4) kann man folgende Schlüsse ziehen:

Um (1) anzuwenden, ermittelt man alle Zerlegungen von 242, 200 bzw. 6 in je zwei Faktoren, die als Tag- und Monatszahl möglich sind. Man findet, z.B. mit Hilfe der Zerlegungen $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$, $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ bzw. $6 = 2 \cdot 3$ in Primfaktoren (oder auch einfach mit probeweisem Dividieren durch 1, 2, ..., 12): Die genannten Zerlegungen sind genau $242 = 22 \cdot 11$, $200 = 25 \cdot 8 = 20 \cdot 10$ bzw. $6 = 6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$; daraus folgt nach (1):

Der Geburtstag des Vaters ist der 22.11., (5)
Der Geburtstag der Mutter ist der 25.8. oder der 20.10., (6)
Der Geburtstag der Tochter ist einer der Tage 6.1., 3.2., 2.3., 1.6.. (7)

Aus (2) und (5), (6), (7) ergibt sich:

Der Vater ist 33 Jahre alt, (8)
die Mutter ist entweder 33 oder 30 Jahre alt, (9)
die Tochter ist entweder 7 oder 5 Jahre alt. (10)

Nach (8) und (4) beträgt das Produkt der Altersangaben von Mutter, Tochter und Sohn

$$59\,400 : 33 = 1\,800.$$

Da diese Zahl weder durch 33 noch durch 7 teilbar ist, sind in (9), (10) und damit in (6), (7) nur möglich:

Die Mutter ist 30 Jahre alt, ihr Geburtstag ist der 20.10., (11)
die Tochter ist 5 Jahre alt, ihr Geburtstag ist entweder der 3.2. oder der 2.3.. (12)

Nochmals nach (4) folgt dann wegen $1\,800 : 30 = 60$ und $60 : 5 = 12$:

Der Sohn ist 12 Jahre alt. (13)

Daher können die Feststellungen (1), (2), (3), (4) nur bei den Angaben in (5), (8), (11), (12), (13) erfüllt sein.

II. Bei diesen Angaben sind die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt. (Wegen $33+30+5+12 = 80$ ist insbesondere auch die - in den bisherigen Betrachtungen noch nicht herangezogene - Feststellung (3) erfüllt.)

Mit I. und II. ist gezeigt: Die beiden in (5), (8), (11), (12), (13) angegebenen Möglichkeiten (für das Alter der vier Familienmitglieder und die Geburtstage von Vater, Mutter und Tochter) sind alle diejenigen, bei denen die Feststellungen (1), (2), (3), (4) erfüllt sind.

(b) Da in (a) I. die Feststellung (3) nicht herangezogen wird (und in (a) II. natürlich auf das Bestätigen dieser Feststellung verzichtet werden kann, wenn sie nicht zu den Forderungen der Aufgabe gehört), hat die Aufgabe nach Weglassen von (3) dieselbe Lösung.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(13) "a+b = b+a" - Heft 52, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 5/6 - Dokumentation I.-XII. Olympiade (1961-1972), Mathematischer Lesebogen vom Rat des Stadtbezirks Leipzig Südost, Abteilung Volksbildung, J. Lehmann und W. Unze, 1973.

(16) Buch: Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR in den Klassen 5 bis 8 von Bernd Noack und Herbert Titze, 1983, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission

(29) Aufgabenblatt der jeweiligen Olympiade

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)