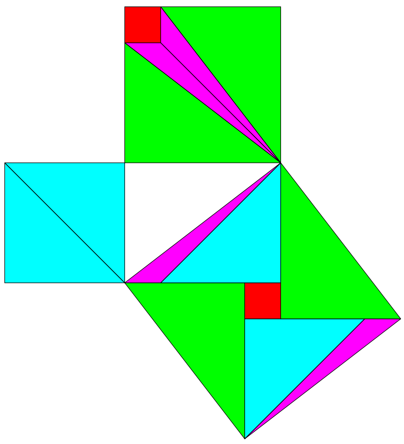
Teilbarkeitsregeln



http://www.olympiade-mathematik.de

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe

Die folgenden Begriffe beziehen sich auf eine Zahl z.

Zifferndarstellung Eine Zahl z wird in ihre Zehnerpotenzen zerlegt. Dabei sind die Ziffern a_i die Faktoren der Zehnerpotenzen:

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$$

Beispiel: $z = 12345 \Rightarrow z = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Primfaktorzerlegung einer Zahl z ist das Produkt aller Primfaktoren der Zahl z.

Beispiel: $z = 481\,481 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 37$.

Es gilt das Lemma von Euklid: Ist ein Produkt zweier natürlicher Zahlen durch eine Primzahl teilbar, so ist bereits einer der Faktoren durch sie teilbar.

Quersumme $Q(z)$ ist die Summe aller Ziffern einer Zahl. In obiger Schreibweise der Zahl z in ihrer Zifferndarstellung heißt dies:

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n} (a_i)$$

Beispiel: $z = 12345 \Rightarrow Q(z) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Alternierende Quersumme $AQ(z)$ (auch Querdifferenz, Paarquersumme oder Wechselsumme genannt) erhält man, indem man bei einer Zahl, beginnend ganz rechts, die Ziffernwerte abwechselnd subtrahiert und addiert.

$$AQ(z) = \pm a_n \mp ... - a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot a_i$$

Beispiel: $z = 12345$ die alternierende Quersumme $AQ(z) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3$.

Nichtalternierende k-Quersumme Die nichtalternierende k-Quersumme Q_k von z ist die Summe der k-stelligen Zahlen, die rechts beginnend aus z gebildet werden:

$$Q_k(z) = \sum_{l=0}^{n/k-1} \sum_{i=0}^{k-1} 10^i \cdot a_{i+k\cdot l}$$

Beispiel: $z = 36036$ ist $Q_2(z) = 3 + 60 + 36 = 99$.

Die nichtalternierende 3er-Quersumme Q_3 von z ist die Summe der dreistelligen Zahlen, die rechts beginnend aus z gebildet werden.

Beispiel: $z = 36036$ ist $Q_3(z) = 36 + 036 = 72$.

Die nichtalternierende k-Quersumme ist identisch zur nichtalternierende Quersumme zur Basis 10^k.

Bemerkung: Die Quersumme $Q(z)$ entspricht der nichtalternierenden 1er-Quersumme.

Alternierende k-Quersumme Die alternierende k-Quersumme AQ_k wird analog zur nichtalternierenden k-Quersumme gebildet. Der Unterschied besteht im wechselnden Vorzeichen bei der Summierung der Zahlen, beginnend bei einem Plus bzgl. der am weitesten rechts stehenden Zahl.

$$AQ_k(z) = \sum_{l=0}^{n/k-1} (-1)^l \sum_{i=0}^{k-1} 10^i \cdot a_{i+k\cdot l}$$

Beispiel: Alternierende 2er-Quersumme $z = 12345$ ist $AQ_2(z) = 1 - 23 + 45 = 23$.

Alternierende 3er-Quersumme $z = 12345$ ist $AQ_3(z) = -12 + 345 = 333$.

Bemerkung: Die alternierende Quersumme $AQ(z)$ entspricht der alternierenden 1er-Quersumme.

Gewichtete Quersumme Dies ist eine Verallgemeinerung der vorher beschriebenen Begriffe. Dabei werden die Ziffern erst mit den Werten einer Zahlenfolge multipliziert und diese Ergebnisse dann addiert. Es wird dabei mit der niederwertigsten Ziffer (die am weitesten rechts stehende Ziffer) begonnen.

Beispiel:

(1) Quersumme: periodische Folge 1, 1, 1, ...

(2) Alternierende Quersumme: periodische Folge 1, -1, 1, -1, 1, ...

(3) Nichtalternierende 2er-Quersumme: periodische Folge 1, 10, 1, 10, 1, ...

(4) Alternierende 2er-Quersumme: periodische Folge 1, 10, -1, -10, 1, ...

(5) Nichtalternierende 3er-Quersumme: periodische Folge 1, 10, 100, 1, 10, 100, 1, ...

(6) Alternierende 3er-Quersumme: periodische Folge 1, 10, 100, -1, -10, -100, 1, ...

Die folgenden Teilbarkeitsregeln beziehen sich auf die Teilbarkeit durch Primzahlen. Weitere Regeln können auf die jeweilige Primfaktorzerlegung zurückgeführt werden.

2 Einfache Regeln

2.1 Teilbarkeit durch 2

Eine ganze Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die Zahl gerade ist, d.h., wenn die letzte Ziffer der Zahl 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

Beweis: Es gilt $z = 10 \cdot b + a_0 = 2 \cdot 5 \cdot b + a_0$ und damit $z \equiv a_0 \pmod 2$. z ist also genau dann durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist, was identisch mit der Aussage des o.g. Satzes ist. □

2.2 Teilbarkeit durch 3

Eine ganze Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, d.h. $3|z \Leftrightarrow 3|Q(z)$

Beweis: Es gilt $10^i \equiv 1^i \equiv 1$ (mod 3), d.h. bei Division durch 3 läßt jede Zehnerpotenz den Rest 1. Damit gilt auch:

$$\begin{aligned} z &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_0 \cdot 10^0 \\ z &\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + ... + a_0 \cdot 1 \pmod 3 \\ &\equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_0 \pmod 3 \\ &\equiv Q(z) \pmod 3 \end{aligned}$$

Also läßt z bei Division durch 3 denselben Rest wie die Quersumme von z, dies gilt insbesondere für den Rest 0 (also die Teilbarkeit durch 3). □

2.3 Teilbarkeit durch 5

Eine ganze Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer der Zahl 0 oder 5 ist.

Beweis: Es gilt $z = 10 \cdot b + a_0 = 5 \cdot 2 \cdot b + a_0$ und damit $z \equiv a_0 \pmod 5$. z ist also genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar ist, was identisch mit der Aussage des o.g. Satzes ist. □

3 Vorbetrachtungen zu gewichteten Quersummen

3.1 Nutzung alternierender und nichtalternierender Quersummen

Es gilt, wenn man die Ziffern von z entsprechend gruppiert und summiert, folgende Schreibweise:

$$z = \sum_{l=0}^{n/k-1} (10)^{k \cdot l} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 10^i \cdot a_{i+k \cdot l}$$

Nehmen wir an, es gelte $m \cdot x = 10^k \pm 1$, dann folgt:

$$\begin{aligned} 10^k &\equiv \mp 1 \pmod{x} \text{ sowie} \\ z &\equiv \sum_{l=0}^{n/k-1} (\mp 1)^l \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 10^i \cdot a_{i+k \cdot l} \pmod{x} \\ z_1 &\equiv \sum_{l=0}^{n/k-1} (-1)^l \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 10^i \cdot a_{i+k \cdot l} \pmod{x} = AQ_k(z) \pmod{x} \\ z_2 &\equiv \sum_{l=0}^{n/k-1} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 10^i \cdot a_{i+k \cdot l} \pmod{x} = Q_k(z) \pmod{x} \end{aligned}$$

Verbal ausgedrückt heißt dies,

(1) daß eine Zahl z genau dann durch x teilbar ist, wenn die alternierende k-Quersumme durch x teilbar ist und es eine Zahl m gibt, für die $m \cdot x = 10^k + 1$ gilt bzw.

(2) daß eine Zahl z genau dann durch x teilbar ist, wenn die nichtalternierende k-Quersumme durch x teilbar ist und es eine Zahl m gibt, für die $m \cdot x = 10^k - 1$ gilt.

Die folgenden Kapitel untersuchen diesen Satz genauer.

3.2 Perioden der gewichteter Quersummen finden

Möchte man eine Teilbarkeitsregel für die natürliche Zahl x finden, so betrachtet man die Reste der 10-er Potenzen bei der Division durch x. Die Reste entsprechen den gesuchten Gewichten.

Beispiel: Untersuchungen bzgl. Rest 7:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \ (\text{mod} 7) \\ 10 &\equiv 3 \ (\text{mod} 7) \\ 100 &\equiv 2 \ (\text{mod} 7) \\ 1000 &\equiv -1 \ (\text{mod} 7) \\ 10000 &\equiv -3 \ (\text{mod} 7) \\ 100000 &\equiv -2 \ (\text{mod} 7) \\ 1000000 &\equiv 1 \ (\text{mod} 7) \end{aligned}$$

Nun wiederholen sich die Reste. Die Wichtungsfolge lautet also 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

4 Teilbarkeit durch alle Teiler von $10^k - 1$

Für alle Teiler von $10^k - 1$ ist die nichtalternierende k-Quersumme ein Teilbarkeitskriterium: Die nichtalternierende k-Quersumme $Q_k(z)$ einer dezimalen Zahl z ist genau dann durch diese Zahlen teilbar, wenn z durch diese teilbar ist.

Insbesondere gelten die Spezialfälle der nichtalternierenden 2er- und 3er-Quersumme:

4.1 $k = 2$: Teilbarkeit durch 3, 9, 11, 33, 99

Für alle Teiler von 99, also für 3, 9, 11, 33 und 99, ist die nichtalternierende 2er-Quersumme ein Teilbarkeitskriterium: Die nichtalternierende 2er-Quersumme $Q_2(z)$ einer dezimalen Zahl z ist genau dann durch diese Zahlen teilbar, wenn z durch diese teilbar ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} z &= 2\,926\,476 \\ y &= 2 + 92 + 64 + 76 = 234 \\ y' &= 2 + 34 = 36 = 4 \cdot 9 \end{aligned}$$

36 ist durch 9 teilbar und damit auch 234 und 2 926 476.

$$\begin{aligned} z &= 3\,582\,865 \\ y &= 3 + 58 + 28 + 65 = 154 = 14 \cdot 11 \end{aligned}$$

154 ist durch 11 teilbar und damit auch 3 582 865.

4.2 $k = 3$: Teilbarkeit durch 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999

Für alle Teiler von 999, also für 3, 9, 27, 37, 111, 333 und 999, ist die nichtalternierende 3er-Quersumme ein Teilbarkeitskriterium: Die nichtalternierende 3er-Quersumme $Q_3(z)$ einer dezimalen Zahl z ist genau dann durch diese Zahlen teilbar, wenn z durch diese teilbar ist.

5 Teilbarkeit durch alle Teiler von $10^k + 1$

Die alternierende k-Quersumme $AQ_k(z)$ einer dezimalen Zahl z ist genau dann durch Teiler von $10^k + 1$ teilbar, wenn z durch diese teilbar ist: $y|z \Leftrightarrow y|AQ_k(z)$, wobei $y|10^k + 1$

Insbesondere gelten die Spezialfälle der alternierenden 2er- und 3er-Quersumme:

5.1 $k = 2$: Teilbarkeit durch 101

Die alternierende 2er-Quersumme $AQ_2(z)$ einer dezimalen Zahl z ist genau dann durch 101 teilbar, wenn z durch 101 teilbar ist.

Beispiel:

$$z = 23\,747\,928$$
$$y = -23 + 74 - 79 + 28 = -14$$

-14 ist durch 7 teilbar, ebenso wie 8 991 969.

5.2 $k = 3$: Teilbarkeit durch 7, 11, 13

Die alternierende 3er-Quersumme $AQ_3(z)$ einer dezimalen Zahl z ist genau dann durch 7, 11 bzw. 13 teilbar, wenn z durch 7, 11 bzw. 13 teilbar ist.

Beispiel:

$$z = 4\,234\,295$$
$$y = 4 - 234 + 295 = 65 = 5 \cdot 13$$

65 ist durch 13 teilbar und damit auch 4 234 295.

6 Regeln ohne gewichtete Quersummen

6.1 Teilbarkeit durch 7, 1. Regel

Die Zahl z zerlege man in Einerstelle und Rest (also $z = 10 \cdot b + a_0$) und bilde $y = b - 2 \cdot a$. Jetzt gilt: z ist genau dann durch 7 teilbar, wenn es y auch ist.

Diese Regel kann rekursiv angewendet werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
z &= 8\,991\,969 = 10 \cdot 899\,196 \ + 9 \\
y &= 899\,196 - 2 \cdot 9 = 899\,178 = 10 \cdot 89\,917 + 8 \\
y' &= 89\,917 - 2 \cdot 8 = 89\,901 = 10 \cdot 8\,990 + 1 \\
y'' &= 8\,990 - 2 \cdot 1 = 8\,988 = 10 \cdot 898 + 8 \\
y''' &= 898 - 2 \cdot 8 = 882 = 10 \cdot 88 + 2 \\
y'''' &= 88 - 2 \cdot 2 = 84 = 12 \cdot 7
\end{aligned}$$

84 ist durch 7 teilbar, genauso wie 882, 8 988, 89 901, 899 178, 8 991 969.

6.2 Teilbarkeit durch 7, 2. Regel

Multipliziere die am weitesten links stehende Ziffer der zu untersuchenden Zahl mit 3, addiere die nächste Ziffer, multipliziere das Zwischenergebnis wieder mit 3, addiere die nächste Ziffer usw. bis auch die letzte Ziffer addiert ist. Die Ausgangszahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn das so erhaltene Resultat durch 7 teilbar ist: mit $y = 3 \cdot (3 \cdot (...(3 \cdot a_n + a_{n-1}) + ...) + a_1) + a_0$ gilt $7|z \Leftrightarrow 7|y$.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
z &= 8\,991\,969 \\
y &= 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot 8 + 9) + 9) + 1) + 9) + 6) + 9 = 8883 \\
y' &= 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot 8 + 8) + 8) + 3 = 315 \\
y'' &= 3 \cdot (3 \cdot 3 + 1) + 5 = 35 = 5 \cdot 7
\end{aligned}$$

35 ist durch 7 teilbar, ebenso wie 315, 8883 und 8 991 969.

6.3 Teilbarkeit durch 19

Die Zahl z zerlege man in Einerstelle und Rest (also $z = 10 \cdot b + a_0$) und bilde $y = b + 2 \cdot a$. Jetzt gilt: z ist genau dann durch 19 teilbar, wenn es y auch ist.

Diese Regel kann rekursiv angewendet werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
z &= 62\,035 = 10 \cdot 6\,203 \ + 5 \\
y &= 6\,203 \ + 2 \cdot 5 = 6\,213 = 10 \cdot 621 + 3 \\
y' &= 621 + 2 \cdot 3 = 627 = 10 \cdot 62 + 7 \\
y'' &= 62 + 2 \cdot 7 = 76 = 10 \cdot 7 + 6 \\
y''' &= 7 + 2 \cdot 6 = 19
\end{aligned}$$

19 ist durch 19 teilbar, genauso wie 76, 627, 6 213, 62 035.

7 Zusammenfassung

Teilbarkeit durch	Periodische Folge der gewichteten Quersumme	Bemerkung
2	1, 0, 0, 0, ...	Letzte Ziffer durch 2 teilbar
3	1, 1, 1, 1, ...	Quersumme
	1, 10, 1, ...	Nichtalternierende 2er-Quersumme
	1, 10, 100, 1, ...	Nichtalternierende 3er-Quersumme
5	1, 0, 0, 0, ...	Letzte Ziffer durch 5 teilbar
7	1, 10, 100, -1, -10, -100, 1, ...	Alternierende 3er-Quersumme
	1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, ...	
9	1, 10, 1, 10, 1, ...	Nichtalternierende 2er-Quersumme
11	1, 10, 1, 10, 1, ...	Nichtalternierende 2er-Quersumme
	1, 10, 100, -1, -10, -100, 1, ...	Alternierende 3er-Quersumme
13	1, 10, 100, -1, -10, -100, 1, ...	Alternierende 3er-Quersumme
37	1, 10, 100, 1, ...	Nichtalternierende 3er-Quersumme
101	1, 10, -1, -10, 1, ...	Alternierende 2er-Quersumme

8 Quellen

Einige Begriffe und Sätze entstammen (z.T. in abgewandelter Form) der Wikipedia: http://de.wikipedia.org wie bspw. die Begriffe Primfaktorzerlegung, Quersumme, Teilbarkeit und verbundene Sätze.

Anregungen aus dem Matheboard: http://www.matheboard.de